On rappelle que la racine cubique, notée $\sqrt[3]{x}$ ou encore $x^{\frac{1}{3}}$, est définie pour tout réel positif ou négatif x et que par exemple $\sqrt[3]{-8}=-2$. On considère la fonction de variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$. On étudie les branches infinies puis les variations et le graphe de cette fonction.

Question 1

(A) La fonction $\sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(B) On a $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$

(C) Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+u)^{1/3}$ est $1+\dfrac{u}{3}+\dfrac{u^2}{9}+u^2\varepsilon(u)$

(D) Pour que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax-b=0$ il faut que $a=-1$ et $b=-\dfrac{2}{3}$

(E) Le graphe de f est en-dessous de la droite d'équation $y=-x+\dfrac{2}{3}$ lorsque x tend vers $+\infty$

Question 2

(A) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ et sa dérivée est $\dfrac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$

(B) La fonction f est croissante si $x<\dfrac{4}{3}$ et décroissante sinon.

(C) Le graphe de f a une tangente verticale en $x=0$

(D) La fonction f a un maximum unique en $x=4/3$

(E) La fonction f a un minimum local unique en $x=0$

Sur $I=]-\pi,+\pi[$, on considère la fonction h définie par $h(x)=\int_0^{x/2}\dfrac{dv}{\cos(v)}$. Pour calculer l'intégrale, on fera le changement de variable $t=\tan(v/2)$.

Question 3

(A) La dérivée de $\tan(v/2)$ est égale à $1+2t^2$

(B) On a $\cos(v)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(C) On a $h(x)=\int_0^{\tan(x/4)}\dfrac{2dt}{1-t^2}$

(D) Une primitive de $\dfrac{1}{1-t^2}$ est $\operatorname{Arc}\tan(t)$

(E) On a $h(x)=\ln\left(\dfrac{1+\tan(x/4)}{1-\tan(x/4)}\right)$