On montrera que la fonction h est bijective de $I \to J$ pour un intervalle J à préciser, et on exprimera la fonction réciproque $k = h^{-1}$ telle que si $x \in I$ et $y \in J$ on a par $h(x) = y \Leftrightarrow x = k(y)$.

Question 4

(A) On a $y = \ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right) \Rightarrow u = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$

(B) La fonction h est une bijection décroissante de I sur $J = h(I)$

(C) On a $J =]0,+\infty[$

(D) On a $\mathrm{ch}(t/2) = \dfrac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{2}$ et $\mathrm{sh}(t/2) = \dfrac{e^{t/2} + e^{-t/2}}{2}$

(E) Sur $\mathbb{R}$ on a $k(y) = 4\,\mathrm{Arc}\tan(\mathrm{th}(y/2))$

On considère l'équation différentielle (E_1) $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \frac{1}{4})y(x) = 0$ pour $x > 0$.

On établira l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u(x) = \sqrt{x}\; y(x)$, et on la résoudra.

Question 5

(A) On a $y'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{u(x)}{2x\sqrt{x}}$

(B) On a $y''(x) = \dfrac{u''(x)}{\sqrt{x}} - \dfrac{u'(x)}{x\sqrt{x}} + \dfrac{3u(x)}{4x^2\sqrt{x}}$

(C) La fonction u est solution de l'équation différentielle $u'' + u = 0$

(D) La solution générale de (E_1) s'écrit $y(x) = A\dfrac{e^x}{\sqrt{x}} + B\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

(E) Les solutions de (E_1) telles que $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x)$ existe s'écrivent $y(x) = B\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

On considère l'équation différentielle (E_2) $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - a)y(x) = 0$, et les fonctions $v(x) = \int_0^x t\sin(t)dt$ et $z(x) = \dfrac{v(x)}{x\sqrt{x}}$. On calculera ces fonctions, et on montrera que z est solution de (E_2) pour une valeur de a à déterminer.

Question 6

(A) L'intégration par parties donne $v(x) = -x\cos(x) + \sin(x)$

(B) Un équivalent de $z(x)$ quand $x \to 0^+$ est $\dfrac{1}{2}x^{3/2}$

(C) On a $xv''(x) - 2v'(x) + xv(x) = 0$

(D) On a $x^2z''(x) = \sqrt{x}\; v''(x) - 3\dfrac{v'(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{15}{4}x\sqrt{x}\; v(x)$

(E) z est solution de (E_2) pour $a = \dfrac{9}{4}$