On veut calculer le polynôme $P(X)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(5t) = P(\cos(t))$. On calculera pour cela l'expression $S = (\cos(t) + i\sin(t))^5$.

Question 7

(A) On a $\cos(5t) = \mathrm{Re}(S)$

(B) On a $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 12a^3b^2 + 12a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

(C) On a $\mathrm{Re}(S) = \cos^5(t) + 10\cos^3(t)\sin^2(t) - 5\cos(t)\sin^4(t)$

(D) On a $P(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$

(E) Sur l'intervalle $[-1,+1]$, le polynôme $P(X)$ prend 3 fois la valeur +1.

On montrera que $P(X)$ possède 5 racines distinctes dans l'intervalle $[-1,+1]$, notés X_k avec k de 0 à 4 avec $1 > X_0 > X_1 ... > X_4 > -1$ et on les calculera explicitement. On déterminera aussi les valeurs correspondantes de t_k définies par $X_k = \cos(t_k)$ et $t_k \in [0,\pi]$.

Question 8

(A) On a $t_k = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}$

(B) On a $X_2 = 0$ et $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$

(C) On a $X_4 = -X_0$ et $X_1 = -X_3$

(D) On a $X_0 = \dfrac{\sqrt{10+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

(E) On a $\cos\left(\dfrac{7\pi}{10}\right) = -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Une chaîne de production fabrique des pièces mécaniques dont 80% sont bonnes (notations B) et 20% défectueuses (notation $\overline{B}$). Un test de contrôle rapide à la sortie de la chaîne permet d'accepter ou de refuser chaque pièce, mais celui ci est aléatoire. On note A l'événement "la pièce est acceptée", $\overline{A}$ l'événement "la pièce n'est pas acceptée" par le test rapide. On observe que :
Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 90%.
Si la pièce est défectueuse, elle est n'est pas acceptée avec une probabilité de 85%.

Question 9

(A) $P(A \cap B) = 72\%$

(B) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 15\%$

(C) $P(A) = 75\%$

(D) La probabilité que la pièce soit bonne sachant qu'elle est acceptée est 72%

(E) La probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle n'est pas acceptée est 68%