

## FORMULAIRE

### Trigonométrie

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1; \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ (fig 1);} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ (fig 2)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ (fig 3);} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$ND$

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x & \tan(-x) &= -\tan x \\ \sin(x+2k\pi) &= \sin x & \cos(x+2k\pi) &= \cos x & \tan(x+k\pi) &= \tan x \\ \cos(x+\pi) &= -\cos x & \sin(x+\pi) &= -\sin x & & \\ \cos(\pi-x) &= -\cos x & \sin(\pi-x) &= \sin x & & \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & & \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \quad \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

En posant  $t = \tan \frac{x}{2}$ , alors on peut écrire :  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$      $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$      $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

$$\cos x = \cos \alpha \iff x \in \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sin x = \sin \alpha \iff x \in \{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

### Trigonométrie hyperbolique

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ (fig 4 à 6)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x \quad (\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch} x \quad (\operatorname{th})'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \quad \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 a \quad \operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a \quad \operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{ch} 2a = \frac{1 + \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a} \quad \operatorname{sh} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th}^2 a} \quad \operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad y = \operatorname{argsh} x \iff y \in \mathbb{R} \quad x = \operatorname{sh} y$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (fig 7)}$$

$$\begin{aligned}
x \in [1; +\infty[ & \quad y = \operatorname{argch} x \iff y \in [0; +\infty[ & \quad x = \operatorname{ch} y \text{ (fig 8)} \\
\forall x \in ]1; +\infty[ & \quad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & \quad \forall x \in ]1; +\infty[ \quad (\operatorname{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
x \in ]-1; 1[ & \quad y = \operatorname{argth} x \iff y \in \mathbb{R} & \quad x = \operatorname{th} y \text{ (fig 9)} \\
\forall x \in ]-1; 1[ & \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \quad \forall x \in ]-1; 1[ \quad (\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

### Trigonométrie inverse

$$\begin{aligned}
\arcsin : [-1; 1] & \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & x \in [-1; 1] & \quad y = \arcsin x \iff y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \quad x = \sin y \text{ (fig 10)} \\
\forall x \in ]-1; 1[ & \quad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arccos : [-1; 1] & \longrightarrow [0; \pi] & x \in [-1; 1] & \quad y = \arccos x \iff y \in [0; \pi] & \quad x = \cos y \text{ (fig 11)} \\
\forall x \in ]-1; 1[ & \quad (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ & x \in \mathbb{R} & \quad y = \arctan x \iff y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ & \quad x = \tan y \text{ (fig 12)} \\
\forall x \in \mathbb{R} & \quad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
\forall x \in [-1; 1] & \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x & \quad \arccos(-x) + \arccos x = \pi & \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \\
\forall x \in [-1; 1] & \quad \sin(\arcsin x) = x & \quad \cos(\arccos x) = x \\
\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \quad \arcsin(\sin y) = y & \quad \forall y \in [0; \pi] & \quad \arccos(\cos y) = y \\
\forall x \in [-1; 1] & \quad \sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} & \quad \cos(2 \arccos x) = 1 - 2x^2 \\
\forall x \in [-1; 1] & \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x) \\
\forall x \in \mathbb{R} & \quad \arctan(-x) = -\arctan x & \quad \tan(\arctan x) = x \\
\forall x \in \mathbb{R}^* & \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2} \text{ où } \operatorname{sgn}(x) = 1 \text{ si } x > 0 \text{ et } \operatorname{sgn}(x) = -1 \text{ si } x < 0 \\
\forall x \in \mathbb{R} & \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \quad \cos(2 \arctan x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} & \quad \sin(2 \arctan x) = \frac{2x}{1+x^2}
\end{aligned}$$

### Dérivation et intégration

$(u+v)' = u' + v'$		$(\lambda u)' = \lambda u'$		$(uv)' = u'v + v'u$	
$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$		$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$		$(f(u))' = u' \times f'(u)$	
$f(x) =$	$f'(x) =$	$f(x) =$	$f'(x) =$	$f(x) =$	$f'(x) =$
$ax + b$	$a$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$x^n \quad n \in \mathbb{Z}$	$nx^{n-1}$	$\ln x $ (fig 13)	$\frac{1}{x}$	$e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ (fig 14)	$\alpha e^{\alpha x}$
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \quad a \in \mathbb{R}^{+*}$	$a^x \ln a$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{th} x$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{argch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{argth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) =$	$\int f(x) dx =$	$f(x) =$	$\int f(x) dx =$
$x^n \quad n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$\cos(\omega x + \varphi)$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi) + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$\sin(\omega x + \varphi)$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi) + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

### Développement limités et équivalents

Dans tout cette section,  $\varepsilon$  désigne une fonction de limite nulle en 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \frac{21844}{6081075}x^{13} + x^{13} \varepsilon(x)$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad \operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x \quad \tan x \underset{0}{\sim} x \quad \operatorname{th} x \underset{0}{\sim} x$$

$$\arcsin x \underset{0}{\sim} x \quad \arctan x \underset{0}{\sim} x \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \operatorname{ch} x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

## Analyse vectorielle

Etant donnée deux vecteurs de l'espace, dans un repère orthonormé direct :  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Etant donnés : des champs scalaires  $f$  et  $g$  de classe  $C^2$ , des champs vectoriels  $\vec{F}$  et  $\vec{G}$  de classe  $C^2$  sur

$$\mathbb{R}^3 : \overrightarrow{\text{grad}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \text{ où } \vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f + \lambda g) = \overrightarrow{\text{grad}} f + \lambda \overrightarrow{\text{grad}} g \quad \text{div}(\vec{F} + \lambda \vec{G}) = \text{div } \vec{F} + \lambda \text{div } \vec{G}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F} + \lambda \vec{G}) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} + \lambda \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f \quad \text{div}(f \vec{F}) = f \text{div } \vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{F}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{F}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{F}$$

$$\text{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{G})$$

$$\Delta(f + \lambda g) = \Delta f + \lambda \Delta g \quad \Delta(fg) = f \Delta g + 2 \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g + g \Delta f$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0} \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(f \overrightarrow{\text{grad}} g) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \overrightarrow{\text{grad}} g$$

## Suites et séries

- Suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$  :  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 + nr \quad \sum_{i=0}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{i=0}^n u_i = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

- Suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$  :  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 q^n \quad \text{Avec } q \neq 1 : \sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \sum_{i=0}^n u_i = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Quelques limites de suites :

$$\text{Si } \alpha > 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty \quad ; \quad \text{Si } \alpha < 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0 \quad ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \text{ et } q > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } q > 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad ; \quad \text{Si } -1 < q < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

- Développements en séries entières et leur rayon de convergence:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} : R = +\infty \quad \text{ch } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} : R = +\infty \quad \text{sh } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} : R = +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} : R = +\infty \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} : R = +\infty$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n : R=1 \quad (+\infty \text{ si } \alpha \in \mathbb{N})$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n : R=1 \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} : R=1 \quad (\text{converge pour } x=1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n : R=1 \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} : R=1 \quad (\text{converge pour } x=-1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} : R=1 \quad (\text{converge pour } x=-1 \text{ et pour } x=1)$$

## Fonctions de plusieurs variables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

- Point critique : un point critique  $a$  de  $f$  est un point tel que les dérivées partielles de  $f$  en  $a$  existent et sont nulles.
- Si  $f$  admet en  $a$  un extremum local et si les dérivées partielles premières de  $f$  en  $a$  existent, alors  $a$  est un point critique de  $f$
- $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $a \in \mathbb{R}^2$ . On suppose que  $a$  est un point critique pour  $f$ . On note  $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .
  - Si  $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r > 0 \end{cases}$  alors  $f$  admet un minimum local en  $a$ .
  - Si  $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r < 0 \end{cases}$  alors  $f$  admet un maximum local en  $a$ .
  - Si  $s^2 - rt > 0$ , alors  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $a$ ,  $a$  est un point selle.

## Statistiques descriptives

- statistique simple :

Etant donnée une série statistique pondérée :  $X(x_i; n_i)_i$ ,  $x_i$  désignant les valeurs prises par le caractère  $X$  et  $n_i$  les effectifs correspondant; En notant  $N$  l'effectif total, c'est-à-dire,  $N = \sum_i n_i$ , alors :

$$\text{moyenne : } \bar{x} = E(x) = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i \quad \text{variance : } V(x) = \frac{1}{N} \sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{ecart-type : } \sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

$$\text{Théorème de Koënic : } V(x) = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

- Régression :

Etant donnée une série statistique double  $(X; Y) : (x_i; y_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'effectif  $n$ .

$$\text{moyenne : } \bar{x} = E(X) = \frac{1}{n} \sum_i x_i \quad \text{variance : } V(X) = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\text{ecart-type : } \sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

$$\text{moyenne : } \bar{y} = E(Y) = \frac{1}{n} \sum_i y_i \quad \text{variance : } V(Y) = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \bar{y})^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$\text{ecart-type : } \sigma_y = \sqrt{V(Y)}$$

$$\text{covariance : } \text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Equation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$  :  $\Delta : y = ax + b$  où  $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$  et  $b = \bar{y} - a\bar{x}$

Equation de la droite de régression de  $X$  en  $Y$  :  $\Delta' : x = a'y + b'$  où  $a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)}$  et  $b' = \bar{y} - a'\bar{x}$

Coefficient de corrélation linéaire :  $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$ . Dans un repère orthonormé :  $r^2 = \cos^2(\Delta, \Delta')$ . On a donc toujours :  $-1 \leq r \leq 1$

## Probabilités

- Dénombrement : Si  $E$  désigne un ensemble de cardinal  $n$  :

Nombre de permutations (bijections de  $E$  sur lui-même) de  $n$  éléments de  $E$  sans répétition :  $n!$

Nombre d'arrangements sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  (sous-ensemble ordonné de  $p$  éléments) :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Nombre d'arrangements avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  :  $n^p$

X. Jeanneret

IUT de Blois

©1999

Nombre de combinaison sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  :  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$

Propriétés des  $C_n^p$  :  $C_n^0 = C_n^n = 1$        $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$        $C_n^{n-p} = C_n^p$        $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Formule du binôme :  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \times a^k \times b^{n-k}$

- Loix discrètes :

Loi	Binomiale	Poisson
Notation	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
Valeurs possibles	$X(E) = \{0; 1; 2; 3; \dots; n\}$	$X(E) = \mathbb{N}$
Probabilités	$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$	$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
Espérance	$np$	$\lambda$
Variance	$np(1-p)$	$\lambda^2$

- Loix continues :

$X$  variable aléatoire de densité de probabilité :  $f : x \mapsto f(x)$

Fonction de répartition :  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = P(X \leq x) \implies P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

Espérance :  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)dt = \mu$

Variance :  $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \times f(t)dt - \mu^2$

Ecart-type :  $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Loi	Uniforme (fig 15)	Exponentielle (Laplace) (fig 16)	Normale (Gauss) (fig 17)
Notation	$\mathcal{U}(a; b)$	$\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Densité	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
Fonction de répartition	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$F(x) = \Pi(x)$ tabulée
Espérance	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	0
Variance	$\frac{1}{12} (b-a)^2$	$\frac{1}{\lambda^2}$	1

X. Jeanneret

IUT de Blois

©1999

Changement de variable pour la loi normale :

Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  alors  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Dans ce cas  $p(X < a) = \Pi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$

Approximation des lois :

$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(np)$  si  $p < 0,1$ ,  $npq \leq 10$  et  $n > 30$

$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\mu = np$  et  $\sigma^2 = npq$ , si  $npq > 10$  et  $n \geq 50$

$\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\mu = \lambda$  et  $\sigma^2 = \lambda$ , si  $\lambda > 20$

## Statistique inférentielle

- Echantillonnage :

Variable aléatoire  $X$  sur une population  $\mathcal{P}$ . On connaît  $E(X) = \mu$  et  $V(X) = \sigma^2$ . On note  $\bar{X}$ , la v.a. égale à la moyenne d'un  $n$ -échantillon non exhaustif de  $X$ .

Alors  $E(\bar{X}) = \mu$  et  $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ .

Si  $n \geq 30$  alors  $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ . Ce résultat reste valable sans condition sur  $n$  si  $X$  suit une loi normale.

- Estimation ponctuelle :

Variable aléatoire  $X$  sur une population  $\mathcal{P}$ . On note  $E(X) = \mu$  et  $V(X) = \sigma^2$  (inconnus à priori). On note  $m$ , la moyenne empirique d'un échantillon non exhaustif de  $X$  de taille  $n$ ,  $s^2$  sa variance.

Estimation ponctuelle de  $\mu$  :  $m$ , de  $\sigma$  :  $\sqrt{\frac{n}{n-1}}s$

- Estimation par intervalle de confiance d'une moyenne :

Variable aléatoire  $X$  sur une population  $\mathcal{P}$ . On note  $E(X) = \mu$  et  $V(X) = \sigma^2$  (inconnus à priori). On note  $m$ , la moyenne empirique d'un échantillon non exhaustif de  $X$  de taille  $n$ ,  $s^2$  sa variance.

$\Pi\left(t_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  ;  $\mathcal{S}\left(t_{1-\frac{\varepsilon}{2}}; n-1\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  (loi de Student à  $n-1$  degrés de liberté)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma$  connu. Niveau de confiance :  $1 - \varepsilon$  (risque =  $\varepsilon$ ).

Alors  $\mu \in \left[ m - t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; m + t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma$  inconnu. Niveau de confiance :  $1 - \varepsilon$

Alors  $\mu \in \left[ m - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\varepsilon}{2}}; m + \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \right]$

$n \geq 30$ . Niveau de confiance :  $1 - \varepsilon$

Alors  $\mu \in \left[ m - t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}}; m + t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right]$

- Tests statistiques :

– Test bilatéral relatif à une moyenne :  $H_0 : \ll \mu = \mu_0 \gg$  contre  $H_1 : \ll \mu \neq \mu_0 \gg$

Variable aléatoire  $X$  sur une population  $\mathcal{P}$ . On note  $E(X) = \mu$  et  $V(X) = \sigma^2$  (inconnus à priori). On note  $m$ , la moyenne empirique d'un échantillon non exhaustif de  $X$  de taille  $n$ ,  $s^2$  sa variance.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma$  connu. Risque de première espèce  $\alpha$ .

Si  $m \in \left[ \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  alors on accepte  $H_0$  avec le risque de première espèce  $\alpha$ .

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma$  inconnu. Risque de première espèce  $\alpha$ .

Si  $m \in \left[ \mu_0 - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}; \mu_0 + \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$  alors on accepte  $H_0$  avec le risque de première espèce  $\alpha$ .

$n \geq 30$ . Risque de première espèce  $\alpha$ .

$m \in \left[ \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}}; \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right]$  alors on accepte  $H_0$  avec le risque de première espèce  $\alpha$ .

– Test d'adéquation à une loi : test du  $\chi^2$ .  $H_0 : \ll X$  suit une loi donnée dépendant de  $s$  paramètres  $\gg$

Données : classes  $n^\circ i$ , avec  $i$  de 1 à  $r$ , effectifs  $n_i$ . Effectif total :  $n$

Valeurs théoriques : classes identiques, probabilités théoriques  $p_i$ .

Calcul de  $T = \sum_{i=1}^r \frac{n_i^2}{np_i} - n$ . On accepte  $H_0$  avec un risque de première espèce  $\alpha$  si  $T \leq \chi_{1-\alpha}^2(r-s-1)$

où  $\chi_{1-\alpha}^2(r-s-1)$  est le quantile d'ordre  $1-\alpha$  de la loi de Pearson à  $r-s-1$  degrés de liberté

## Coniques

- Parabole : (fig 18)

Equation réduite rapportée à un repère orthonormé :  $(\mathcal{P}) Y = \frac{X^2}{4p}$  où  $p \in \mathbb{R}^*$

Sommet :  $S(0; 0)$ , Foyer :  $F(0; p)$ , Directrice :  $\Delta(y = -p)$

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow d(M, \Delta) = MF$

- Ellipse : (fig 19)

Equation réduite rapportée à un repère orthonormé :  $(\mathcal{E}) \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ .

Si  $a > b$ , avec  $c^2 = a^2 - b^2$  :

Sommets principaux :  $S(\pm a; 0)$ , Foyers :  $F(\pm c; 0)$

Excentricité :  $e = \frac{c}{a}$ ,  $0 \leq e < 1$

$M \in (\mathcal{E}) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$

- Hyperbole : (fig 20)

Equation réduite rapportée à un repère orthonormé :  $(\mathcal{H}) \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ .

$c^2 = a^2 + b^2$  :

Sommets :  $S(\pm a; 0)$ , Foyers :  $F(\pm c; 0)$ , Asymptotes :  $y = \pm \frac{b}{a}x$

Excentricité :  $e = \frac{c}{a}$ ,  $e > 1$

$M \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a$

## Mathématiques du signal

- Séries de Fourier

$x$   $2\pi$ -périodique :  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) dt$  ;  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos ntdt$ ,  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin ntdt$

$x$   $T$ -périodique :  $a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$  ;  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t dt$ ,  $b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t dt$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

- Transformées de Fourier :  $\mathcal{F}(x(t))(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi ft} dt = \hat{x}(f)$

$f * g : u \mapsto (f * g)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-t)g(t) dt$

$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y)$

$\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{F}(x) + \beta \mathcal{F}(y)$

$\mathcal{F}(x^{(n)}) = (2i\pi f)^n \mathcal{F}(x)$  en particulier :  $\mathcal{F}(x') = 2i\pi f \mathcal{F}(x)$

Changement d'échelle :  $\mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(\frac{f}{a}\right)$

Théorème du retard :  $\mathcal{F}(x(t - \alpha)) = e^{-i\pi f \alpha} \mathcal{F}(x(t))$  Dualité :  $\mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(-t)$

Produit par l'exponentielle :  $\mathcal{F}(x(t) e^{-2i\pi f t})(f) = \mathcal{F}(x(t))(f - a)$

Produit par le temps :  $\mathcal{F}(tx(t)) = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{df} (\mathcal{F}(x(t)))$

Tableau des transformées de Fourier usuelles :

Signal	Transformée de Fourier	Signal	Transformée de Fourier
$\delta(t)$	1	$\delta^{(n)}(t)$	$(2i\pi f)^n$
$e^{-a t }; a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	1	$\delta(f)$
sgn(t)	VP $\left(\frac{1}{i\pi f}\right)$	$e^{2i\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2i} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2i} \delta(f + f_0)$	Rect $\left(\frac{t}{T}\right)$	$2T \operatorname{sinc}(2\pi f T)$
$2f_0 \operatorname{sinc}(2\pi f_0 t)$	Rect $\left(\frac{f}{f_0}\right)$	$\Gamma(t)$	VP $\left(\frac{1}{2i\pi f}\right) + \frac{1}{2} \delta(f)$
$e^{st} \Gamma(t); \operatorname{Re}(s) < 0$	$\frac{1}{2i\pi f - s}$	$e^{-at} \Gamma(t); a > 0$	$\frac{1}{2i\pi f + a}$
$te^{-at} \Gamma(t)$	$\frac{1}{(2i\pi f + a)^2}$	$e^{2i\pi f_0 t} \Gamma(t)$	$\frac{1}{2i\pi} \operatorname{VP}\left(\frac{1}{f - f_0}\right) + \frac{1}{2} \delta(f - f_0)$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) \Gamma(t)$	$\frac{2\pi f}{(2i\pi f + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) \Gamma(t)$	$\frac{2\pi f + a}{(2i\pi f + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$

Rect :  $X \mapsto \operatorname{Rect}(X) = 1$  si  $-1 < X < 1$ , 0 sinon.

$\Gamma : X \mapsto \Gamma(X) = 1$ , si  $X \geq 0$ , 0 sinon.

sgn :  $X \mapsto \operatorname{sgn}(X) = 1$  si  $X > 0$ ,  $-1$  si  $X < 0$

VP :  $X \mapsto \operatorname{VP}(X) = \frac{1}{X}$  si  $X \neq 0$ ,  $\operatorname{VP}(0) = 0$

- Transformées de Laplace :  $\mathcal{L}(x(t))(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$

$$\mathcal{L}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{L}(x) + \beta \mathcal{L}(y)$$

$$\mathcal{L}(x * y) = \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y)$$

$$\mathcal{L}(x^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(x) - \sum_{p=0}^{n-1} s^{n-p-1} x^{(p)}(0^+),$$

en particulier  $\mathcal{L}(x') = s \mathcal{L}(x) - x(0^+)$ ,  $\mathcal{L}(x'') = s^2 \mathcal{L}(x) - sx(0^+) - x'(0^+)$

$$\text{Transformée et intégration : } \mathcal{L}\left(\int_0^t x(\tau) d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}(x(t))(s)}{s}$$

Théorème du retard :  $\mathcal{L}(x(t - a)) = e^{-sa} \mathcal{L}(x(t))$

Changement d'échelle :  $\mathcal{L}(x(at)) = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}\left(\frac{s}{a}\right)$

Produit par une exponentielle :  $\mathcal{L}(x(t) e^{\alpha t})(s) = \mathcal{L}(x(t))(s - \alpha)$

Produit par le temps :  $\mathcal{L}(tx(t)) = -\frac{d}{ds} (\mathcal{L}(x)(s))$

Tableau des transformées de Laplace usuelles :

Signal	Transformée de Laplace	Signal	Transformée de Laplace
$\delta(t)$	1	$\delta(t - T)$	$e^{-Ts}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\frac{1}{(b-a)} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(a-b)} (ae^{-at} - be^{-bt})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a} [(z-a)e^{-at} - (z-b)e^{-bt}]$	$\frac{s+z}{(s+a)(s+b)}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{(z-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{(z-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{(z-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{s+z}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$

Signal	Transformée de Laplace	Signal	Transformée de Laplace
$\Gamma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Gamma(t-T)$	$\frac{1}{s}e^{-Ts}$
$\Gamma(t) - \Gamma(t-T)$	$\frac{1}{s}(1 - e^{-Ts})$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{ab} \left( z - \frac{b(z-a)e^{-at}}{b-a} + \frac{a(z-b)e^{-bt}}{b-a} \right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t))$	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{a^2}(z - ze^{-at} - a(a-z)te^{-at})$	$\frac{s+z}{s(s+a)^2}$	$t\Gamma(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$e^{-\frac{t^2}{2}}$	$e^{-\frac{s^2}{2}}$

- Transformée en Z :

Propriétés de la transformée en Z :

Signaux discrets	Transformées en Z
$f(n)$ et $g(n)$	$F(z)$ avec $ z  > R$ et $G(z)$ avec $ z  > R'$
Linéarité : $\alpha f(n) + \beta g(n)$	$\alpha F(z) + \beta G(z)$ avec $ z  > \max(R, R')$
Retard : $f(n-k)$	$z^{-k}F(z)$
Avances : $f(n+1)$ $f(n+2)$ $f(n+k)$	$z(F(z) - f(0))$ $z^2(F(z) - f(0) - f(1)z^{-1})$ $z^k \left( F(z) - \sum_{p=0}^{k-1} f(p)z^{-p} \right)$
Produit par $a^n : a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right) ;  z  >  a R$
$nf(n)$	$-z \frac{dF}{dz}(z)$

Transformées en Z usuelles :

$\{x_n\}$	$X(z)$	Anneau de convergence
$a^n$ avec $ a  < 1$	$\frac{z}{z-a}$	$ z  >  a $
$\delta_{n-k}$	$z^{-k}$	$]0; +\infty[$
$H_n$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$]1; +\infty[$
$a^n H_n$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$]  a ; +\infty[$
$nH_n$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$	$]1; +\infty[$
$n^2 H_n$	$\frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1-z^{-1})^3} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}$	$]1; +\infty[$
$na^n H_n$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$]  a ; +\infty[$
$(a^n \cos nb) H_n$	$\frac{z^2 - az \cos b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$	$]  a ; +\infty[$
$(a^n \sin nb) H_n$	$\frac{az \sin b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$	$]  a ; +\infty[$

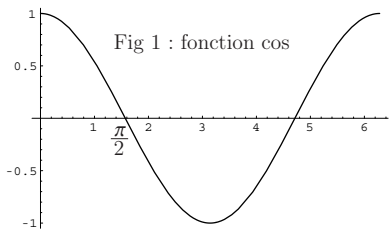


Fig 1 : fonction cos

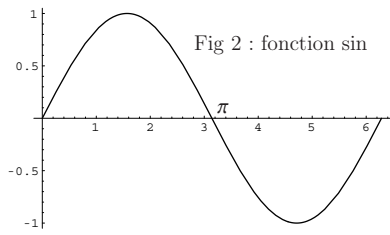


Fig 2 : fonction sin

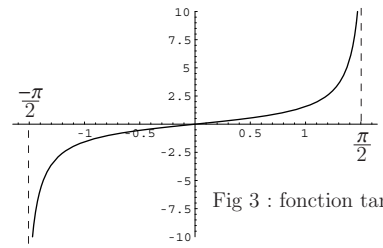


Fig 3 : fonction tan

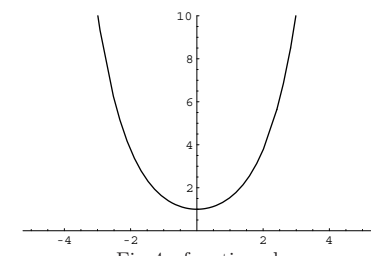


Fig 4 : fonction ch

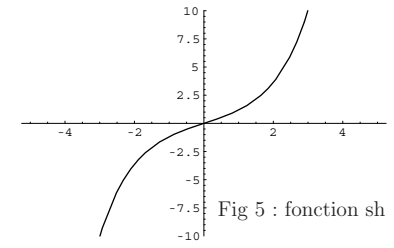


Fig 5 : fonction sh

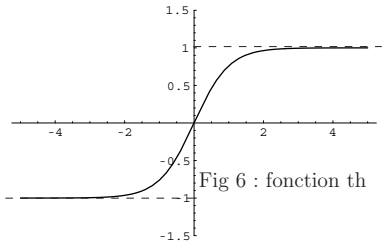


Fig 6 : fonction th

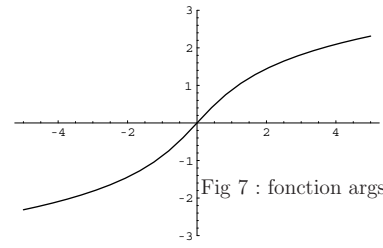


Fig 7 : fonction argsh

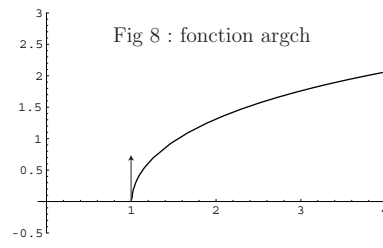


Fig 8 : fonction argch

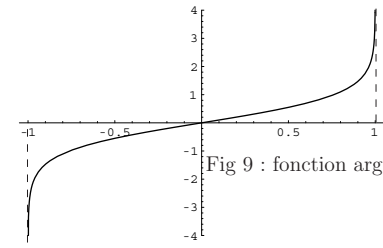


Fig 9 : fonction argh

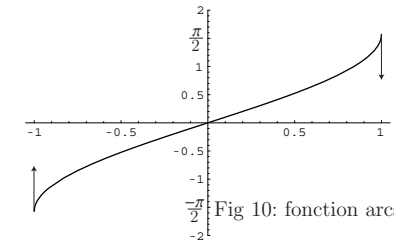


Fig 10 : fonction arcsin

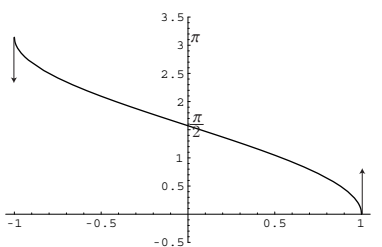


Fig 11 : fonction arccos

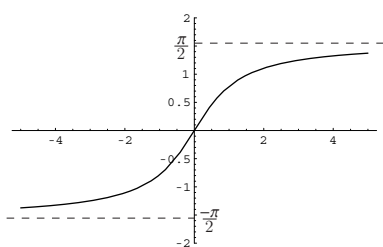


Fig 12 : fonction arctan

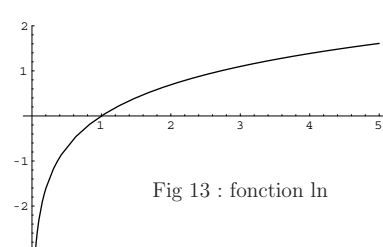


Fig 13 : fonction ln

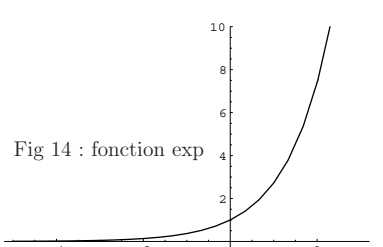


Fig 14 : fonction exp

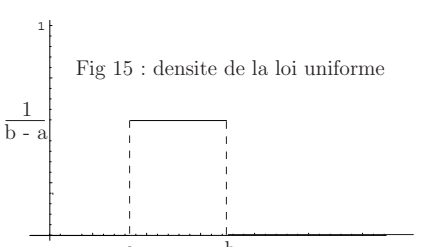


Fig 15 : densite de la loi uniforme

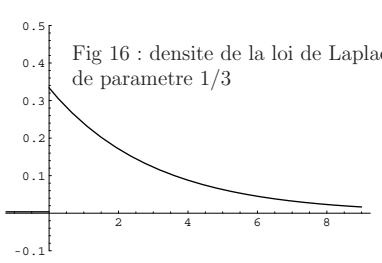


Fig 16 : densite de la loi de Laplace de parametre 1/3

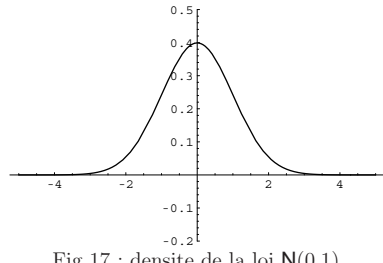


Fig 17 : densite de la loi N(0,1)

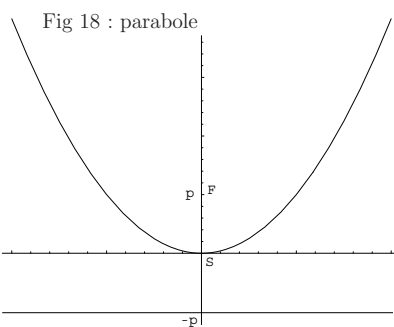


Fig 18 : parabole

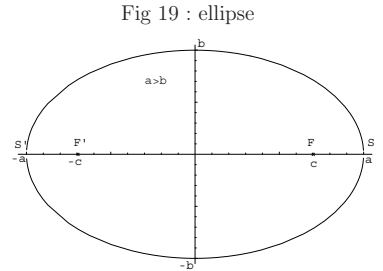


Fig 19 : ellipse

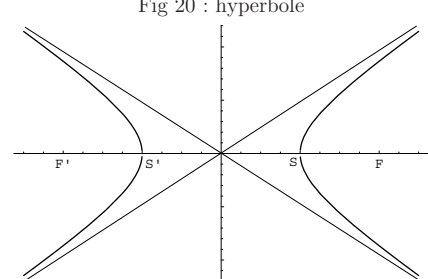


Fig 20 : hyperbole

# Loi normale

Tableau de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Si  $X$  suit une loi normale  $N(0, 1)$ ,

connaissant  $u$ , on lit dans le tableau suivant la valeur  $\Phi(u) = P(X < u)$

	<b>0</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
<b>0</b>	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
<b>0,1</b>	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
<b>0,2</b>	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
<b>0,3</b>	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
<b>0,4</b>	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
<b>0,5</b>	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
<b>0,6</b>	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
<b>0,7</b>	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
<b>0,8</b>	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
<b>0,9</b>	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
<b>1</b>	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
<b>1,1</b>	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
<b>1,2</b>	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
<b>1,3</b>	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
<b>1,4</b>	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
<b>1,5</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,6</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,7</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,8</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,9</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
<b>2</b>	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
<b>2,1</b>	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
<b>2,2</b>	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
<b>2,3</b>	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
<b>2,4</b>	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
<b>2,5</b>	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
<b>2,6</b>	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
<b>2,7</b>	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
<b>2,8</b>	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
<b>2,9</b>	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Pour les grandes valeurs de  $u$  :

$u$	<b>3,0</b>	<b>3,1</b>	<b>3,2</b>	<b>3,3</b>	<b>3,4</b>	<b>3,5</b>	<b>3,6</b>	<b>3,7</b>	<b>4,0</b>	<b>4,5</b>
$\Phi(u)$	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000

## Loi normale inverse

Tableau inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Si  $X$  suit une loi normale  $N(0,1)$ , connaissant  $\epsilon$ , on lit dans le tableau suivant la valeur  $u$  telle que  $\Phi(u) = \epsilon$

	<b>0</b>	<b>0,001</b>	<b>0,002</b>	<b>0,003</b>	<b>0,004</b>	<b>0,005</b>	<b>0,006</b>	<b>0,007</b>	<b>0,008</b>	<b>0,009</b>
<b>0,5</b>	0,0000	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0201	0,0226
<b>0,51</b>	0,0251	0,0276	0,0301	0,0326	0,0351	0,0376	0,0401	0,0426	0,0451	0,0476
<b>0,52</b>	0,0502	0,0527	0,0552	0,0577	0,0602	0,0627	0,0652	0,0677	0,0702	0,0728
<b>0,53</b>	0,0753	0,0778	0,0803	0,0828	0,0853	0,0878	0,0904	0,0929	0,0954	0,0979
<b>0,54</b>	0,1004	0,1030	0,1055	0,1080	0,1105	0,1130	0,1156	0,1181	0,1206	0,1231
<b>0,55</b>	0,1257	0,1282	0,1307	0,1332	0,1358	0,1383	0,1408	0,1434	0,1459	0,1484
<b>0,56</b>	0,1510	0,1535	0,1560	0,1586	0,1611	0,1637	0,1662	0,1687	0,1713	0,1738
<b>0,57</b>	0,1764	0,1789	0,1815	0,1840	0,1866	0,1891	0,1917	0,1942	0,1968	0,1993
<b>0,58</b>	0,2019	0,2045	0,2070	0,2096	0,2121	0,2147	0,2173	0,2198	0,2224	0,2250
<b>0,59</b>	0,2275	0,2301	0,2327	0,2353	0,2378	0,2404	0,2430	0,2456	0,2482	0,2508
<b>0,6</b>	0,2533	0,2559	0,2585	0,2611	0,2637	0,2663	0,2689	0,2715	0,2741	0,2767
<b>0,61</b>	0,2793	0,2819	0,2845	0,2871	0,2898	0,2924	0,2950	0,2976	0,3002	0,3029
<b>0,62</b>	0,3055	0,3081	0,3107	0,3134	0,3160	0,3186	0,3213	0,3239	0,3266	0,3292
<b>0,63</b>	0,3319	0,3345	0,3372	0,3398	0,3425	0,3451	0,3478	0,3505	0,3531	0,3558
<b>0,64</b>	0,3585	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3745	0,3772	0,3799	0,3826
<b>0,65</b>	0,3853	0,3880	0,3907	0,3934	0,3961	0,3989	0,4016	0,4043	0,4070	0,4097
<b>0,66</b>	0,4125	0,4152	0,4179	0,4207	0,4234	0,4261	0,4289	0,4316	0,4344	0,4372
<b>0,67</b>	0,4399	0,4427	0,4454	0,4482	0,4510	0,4538	0,4565	0,4593	0,4621	0,4649
<b>0,68</b>	0,4677	0,4705	0,4733	0,4761	0,4789	0,4817	0,4845	0,4874	0,4902	0,4930
<b>0,69</b>	0,4958	0,4987	0,5015	0,5044	0,5072	0,5101	0,5129	0,5158	0,5187	0,5215
<b>0,7</b>	0,5244	0,5273	0,5302	0,5330	0,5359	0,5388	0,5417	0,5446	0,5476	0,5505
<b>0,71</b>	0,5534	0,5563	0,5592	0,5622	0,5651	0,5681	0,5710	0,5740	0,5769	0,5799
<b>0,72</b>	0,5828	0,5858	0,5888	0,5918	0,5948	0,5978	0,6008	0,6038	0,6068	0,6098
<b>0,73</b>	0,6128	0,6158	0,6189	0,6219	0,6250	0,6280	0,6311	0,6341	0,6372	0,6403
<b>0,74</b>	0,6433	0,6464	0,6495	0,6526	0,6557	0,6588	0,6620	0,6651	0,6682	0,6713
<b>0,75</b>	0,6745	0,6776	0,6808	0,6840	0,6871	0,6903	0,6935	0,6967	0,6999	0,7031
<b>0,76</b>	0,7063	0,7095	0,7128	0,7160	0,7192	0,7225	0,7257	0,7290	0,7323	0,7356
<b>0,77</b>	0,7388	0,7421	0,7454	0,7488	0,7521	0,7554	0,7588	0,7621	0,7655	0,7688
<b>0,78</b>	0,7722	0,7756	0,7790	0,7824	0,7858	0,7892	0,7926	0,7961	0,7995	0,8030
<b>0,79</b>	0,8064	0,8099	0,8134	0,8169	0,8204	0,8239	0,8274	0,8310	0,8345	0,8381
<b>0,8</b>	0,8416	0,8452	0,8488	0,8524	0,8560	0,8596	0,8632	0,8669	0,8706	0,8742
<b>0,81</b>	0,8779	0,8816	0,8853	0,8890	0,8927	0,8965	0,9002	0,9040	0,9078	0,9116
<b>0,82</b>	0,9154	0,9192	0,9230	0,9269	0,9307	0,9346	0,9385	0,9424	0,9463	0,9502
<b>0,83</b>	0,9542	0,9581	0,9621	0,9661	0,9701	0,9741	0,9782	0,9822	0,9863	0,9904
<b>0,84</b>	0,9945	0,9986	1,0027	1,0069	1,0110	1,0152	1,0194	1,0237	1,0279	1,0322
<b>0,85</b>	1,0364	1,0407	1,0451	1,0494	1,0537	1,0581	1,0625	1,0669	1,0714	1,0758
<b>0,86</b>	1,0803	1,0848	1,0893	1,0939	1,0985	1,1031	1,1077	1,1123	1,1170	1,1217
<b>0,87</b>	1,1264	1,1311	1,1359	1,1407	1,1455	1,1503	1,1552	1,1601	1,1650	1,1700
<b>0,88</b>	1,1750	1,1800	1,1850	1,1901	1,1952	1,2004	1,2055	1,2107	1,2160	1,2212
<b>0,89</b>	1,2265	1,2319	1,2372	1,2426	1,2481	1,2536	1,2591	1,2646	1,2702	1,2759
<b>0,9</b>	1,2816	1,2873	1,2930	1,2988	1,3047	1,3106	1,3165	1,3225	1,3285	1,3346
<b>0,91</b>	1,3408	1,3469	1,3532	1,3595	1,3658	1,3722	1,3787	1,3852	1,3917	1,3984
<b>0,92</b>	1,4051	1,4118	1,4187	1,4255	1,4325	1,4395	1,4466	1,4538	1,4611	1,4684
<b>0,93</b>	1,4758	1,4833	1,4909	1,4985	1,5063	1,5141	1,5220	1,5301	1,5382	1,5464
<b>0,94</b>	1,5548	1,5632	1,5718	1,5805	1,5893	1,5982	1,6072	1,6164	1,6258	1,6352
<b>0,95</b>	1,6449	1,6546	1,6646	1,6747	1,6849	1,6954	1,7060	1,7169	1,7279	1,7392
<b>0,96</b>	1,7507	1,7624	1,7744	1,7866	1,7991	1,8119	1,8250	1,8384	1,8522	1,8663
<b>0,97</b>	1,8808	1,8957	1,9110	1,9268	1,9431	1,9600	1,9774	1,9954	2,0141	2,0335
<b>0,98</b>	2,0537	2,0748	2,0969	2,1201	2,1444	2,1701	2,1973	2,2262	2,2571	2,2904
<b>0,99</b>	2,3263	2,3656	2,4089	2,4573	2,5121	2,5758	2,6521	2,7478	2,8782	3,0902

Pour les petites valeurs de  $\epsilon$  on lit  $u$  tel que  $\Phi(u) = 1 - \epsilon$

$\epsilon$	<b>1,00E-04</b>	<b>1,00E-05</b>	<b>1,00E-06</b>	<b>1,00E-07</b>	<b>1,00E-08</b>	<b>1,00E-09</b>
<b><math>u</math></b>	3,7195	4,2655	4,7684	5,1993	5,6120	5,9978

## Table de la loi du $\chi^2$ :

$n$  désigne le nombre de degrés de liberté. Etant donné un nombre on lit tel que  $P(\chi^2_n \leq x) =$

$n \setminus \epsilon$	0,01	0,01	0,03	0,03	0,05	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,97	0,975	0,99	0,995
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0,15	0,45	0,71	1,07	1,64	2,71	3,84	4,71	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,06	0,10	0,06	0,21	0,45	0,71	1,39	1,83	2,41	3,22	4,61	5,99	7,01	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,25	0,35	0,25	0,58	1,01	1,42	2,37	2,95	3,66	4,64	6,25	7,81	8,95	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,54	0,71	0,54	1,06	1,65	2,19	3,36	4,04	4,88	5,99	7,78	9,49	10,71	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	0,90	1,15	0,90	1,61	2,34	3,00	4,35	5,13	6,06	7,29	9,24	11,07	12,37	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,33	1,64	1,33	2,20	3,07	3,83	5,35	6,21	7,23	8,56	10,64	12,59	13,97	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	1,80	2,17	1,80	2,83	3,82	4,67	6,35	7,28	8,38	9,80	12,02	14,07	15,51	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,31	2,73	2,31	3,49	4,59	5,53	7,34	8,35	9,52	11,03	13,36	15,51	17,01	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	2,85	3,33	2,85	4,17	5,38	6,39	8,34	9,41	10,66	12,24	14,68	16,92	18,48	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,41	3,94	3,41	4,87	6,18	7,27	9,34	10,47	11,78	13,44	15,99	18,31	19,92	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,00	4,57	4,00	5,58	6,99	8,15	10,34	11,53	12,90	14,63	17,28	19,68	21,34	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	4,60	5,23	4,60	6,30	7,81	9,03	11,34	12,58	14,01	15,81	18,55	21,03	22,74	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,22	5,89	5,22	7,04	8,63	9,93	12,34	13,64	15,12	16,98	19,81	22,36	24,12	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	5,86	6,57	5,86	7,79	9,47	10,82	13,34	14,69	16,22	18,15	21,06	23,68	25,49	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	6,50	7,26	6,50	8,55	10,31	11,72	14,34	15,73	17,32	19,31	22,31	25,00	26,85	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,16	7,96	7,16	9,31	11,15	12,62	15,34	16,78	18,42	20,47	23,54	26,30	28,19	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	7,83	8,67	7,83	10,09	12,00	13,53	16,34	17,82	19,51	21,61	24,77	27,59	29,52	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	8,51	9,39	8,51	10,86	12,86	14,44	17,34	18,87	20,60	22,76	25,99	28,87	30,84	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	9,20	10,12	9,20	11,65	13,72	15,35	18,34	19,91	21,69	23,90	27,20	30,14	32,16	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	9,90	10,85	9,90	12,44	14,58	16,27	19,34	20,95	22,77	25,04	28,41	31,41	33,46	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	10,60	11,59	10,60	13,24	15,44	17,18	20,34	21,99	23,86	26,17	29,62	32,67	34,76	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	11,31	12,34	11,31	14,04	16,31	18,10	21,34	23,03	24,94	27,30	30,81	33,92	36,05	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	12,03	13,09	12,03	14,85	17,19	19,02	22,34	24,07	26,02	28,43	32,01	35,17	37,33	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	12,75	13,85	12,75	15,66	18,06	19,94	23,34	25,11	27,10	29,55	33,20	36,42	38,61	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	13,48	14,61	13,48	16,47	18,94	20,87	24,34	26,14	28,17	30,68	34,38	37,65	39,88	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	14,22	15,38	14,22	17,29	19,82	21,79	25,34	27,18	29,25	31,79	35,56	38,89	41,15	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	14,96	16,15	14,96	18,11	20,70	22,72	26,34	28,21	30,32	32,91	36,74	40,11	42,41	43,19	46,96	49,65
28	12,46	13,56	15,31	15,70	16,93	15,70	18,94	21,59	23,65	27,34	29,25	31,39	34,03	37,92	41,34	43,66	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	16,45	17,71	16,45	19,77	22,48	24,58	28,34	30,28	32,46	35,14	39,09	42,56	44,91	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	17,21	18,49	17,21	20,60	23,36	25,51	29,34	31,32	33,53	36,25	40,26	43,77	46,16	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	24,94	26,51	24,94	29,05	32,34	34,87	39,34	41,62	44,16	47,27	51,81	55,76	58,43	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	32,95	34,76	32,95	37,69	41,45	44,31	49,33	51,89	54,72	58,16	63,17	67,50	70,42	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	41,15	43,19	41,15	46,46	50,64	53,81	59,33	62,13	65,23	68,97	74,40	79,08	82,23	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	49,50	51,74	49,50	55,33	59,90	63,35	69,33	72,36	75,69	79,71	85,53	90,53	93,88	95,02	100,43	104,21
80	51,17	53,54	57,15	57,96	60,39	57,96	64,28	69,21	72,92	79,33	82,57	86,12	90,41	96,58	101,88	105,42	106,63	112,33	116,32
90	59,20	61,75	65,65	66,51	69,13	66,51	73,29	78,56	82,51	89,33	92,76	96,52	101,05	107,57	113,15	116,87	118,14	124,12	128,30
100	67,33	70,06	74,22	75,14	77,93	75,14	82,36	87,95	92,13	99,33	102,95	106,91	111,67	118,50	124,34	128,24	129,56	135,81	140,17

## Table de la loi de Student :

$n$  désigne le nombre de degrés de liberté. Etant donné un nombre on lit  $t$  tel que  $S(t) =$

$\epsilon \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0,900	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,83	1,81	1,796	1,782	1,771	1,761	1,753	1,746	1,74	1,734	1,729
0,950	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,201	2,179	2,16	2,145	2,131	2,12	2,11	2,101	2,093
0,975	25,5	6,21	4,18	3,5	3,16	2,97	2,84	2,75	2,69	2,63	2,593	2,56	2,533	2,51	2,49	2,473	2,458	2,445	2,433
0,990	63,7	9,92	5,84	4,6	4,03	3,71	3,5	3,36	3,25	3,17	3,106	3,055	3,012	2,977	2,947	2,921	2,898	2,878	2,861
0,995	127	14,1	7,45	5,6	4,77	4,32	4,03	3,83	3,69	3,58	3,497	3,428	3,372	3,326	3,286	3,252	3,222	3,197	3,174
0,999	637	31,6	12,9	8,61	6,87	5,96	5,41	5,04	4,78	4,59	4,437	4,318	4,221	4,14	4,073	4,015	3,965	3,922	3,883
$\epsilon \setminus n$	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	70	80	90	100	110
0,900	1,72	1,72	1,72	1,71	1,71	1,71	1,71	1,7	1,7	1,7	1,697	1,684	1,676	1,671	1,667	1,664	1,662	1,66	1,659
0,950	2,09	2,08	2,07	2,07	2,06	2,06	2,06	2,05	2,05	2,05	2,042	2,021	2,009	2	1,994	1,99	1,987	1,984	1,982
0,975	2,42	2,41	2,41	2,4	2,39	2,38	2,38	2,37	2,37	2,36	2,36	2,329	2,311	2,299	2,291	2,284	2,28	2,276	2,272
0,990	2,85	2,83	2,82	2,81	2,8	2,79	2,78	2,77	2,76	2,76	2,75	2,704	2,678	2,66	2,648	2,639	2,632	2,626	2,621
0,995	3,15	3,14	3,12	3,1	3,09	3,08	3,07	3,06	3,05	3,04	3,03	2,971	2,937	2,915	2,899	2,887	2,878	2,871	2,865
0,999	3,85	3,82	3,79	3,77	3,75	3,73	3,71	3,69	3,67	3,66	3,646	3,551	3,496	3,46	3,435	3,416	3,402	3,39	3,381

Loi binomiale : on lit  $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
3	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
4	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
5	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
6	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
7	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
7	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
8	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
10	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
10	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010

