Formulaire de Mathématiques

Programme de PCSI

Nicolas Marteau
1er septembre 2005

Formules générales

$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$ .... I famille finie d'indices, $\sigma \in \mathfrak{S}_I$

$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$ .... I, J familles finies d'indices

$\sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le i} u_{i,j} = \sum_{1\le j\le n}\sum_{j\le i\le n} u_{i,j}$ ....

Série géométrique

$(1-\theta)\cdot(1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^n) = 1-\theta^{n+1}$ .... $\theta \in A$, $(A,+,\cdot)$ anneau

$1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^n = \dfrac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta}$ .... $\theta\in\mathbb{C},\ \theta\neq 1$

$\theta^k+\theta^{k+1}+\cdots+\theta^{k+p} = \theta^k\,\dfrac{1-\theta^{p+1}}{1-\theta}$ .... $\theta\in\mathbb{C},\ \theta\neq 1$

$1+e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}+\cdots+e^{ni\alpha} = \dfrac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = \dfrac{\sin(\frac{(n+1)\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}e^{in\frac{\alpha}{2}}$ .... $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\notin 2\pi\mathbb{Z}$

Somme de puissances

$\sum_{0\le k\le n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ .... $n\in\mathbb{N}$

$\sum_{0\le k\le n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .... "

$\sum_{0\le k\le n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ .... "

$\sum_{1\le k\le n} k^{-1} = \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma_n \sim \ln n$ ... avec $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma = 0{,}57\ldots$, constante d'Euler

---

Factorisation

$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$ .... Valable dans un anneau ...

$x^{2n+1}+y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+\cdots-xy^{2n-1}+y^{2n})$ .... si x et y commutent

$x^{kn}-y^{km} = (x^n-y^m)(x^{n(k-1)}+x^{n(k-2)}y^m+x^{n(k-3)}y^{2m}+\cdots+x^ny^{m(k-2)}+y^{m(k-1)})$ .. "

Binôme de Newton

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ ... $0\le k\le n$, nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$, $\quad\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k} = 2^n$, $\quad\sum_{0\le k\le n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0\ (=1 \text{ si } n=0)$ ....

$(a+b)^n = \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$ .... a et b deux éléments qui commutent d'un anneau

$(a-b)^n = \sum_{0\le k\le n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$ .... "

$(1+x)^n = \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}x^k$, $\quad(1-x)^n = \sum_{0\le k\le n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$ .... x dans un anneau

$(a_1+\cdots+a_p)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_p=n}\dfrac{n!}{k_1!\cdots k_p!}a_1^{k_1}\cdots a_p^{k_p}$ .... $(a_1,\ldots,a_p)\in\mathbb{C}^p$

$(a_1+\cdots+a_p)^2 = a_1^2+\cdots+a_p^2+2\sum_{1\le i<j\le p}a_ia_j$ ....

$0\le k\le n \longrightarrow$

$0\le n\le 6 \downarrow$

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

Coefficients du binôme $\binom{n}{k}$

$\binom{n}{k} \searrow + \swarrow \binom{n}{k+1}$ $\quad\Rightarrow\quad \binom{n+1}{k+1}$

Alphabet grec

α, alpha / β, beta / γ, Γ, gamma / δ, Δ, delta / ε, epsilon / ζ, zeta / η, eta / θ, Θ, theta / λ, Λ, lambda

μ, mu / ν, nu / ξ, xi / π, Π, pi / ρ, rho / σ, Σ, sigma / τ, tau / ϕ, φ, Φ, phi / χ, khi / ψ, Ψ, psi / ω, Ω, omega

Trigonométrie circulaire directe

Euler-Moivre
Pythagore
divers

$\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2,\ e^{u+v} = e^u e^v,\ \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\ e^{ix} = \cos x + i \sin x,\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n,\ \cos^n x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^n,\ \sin^n x = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^n$

$e^{ix} + 1 = 2\cos(\frac{x}{2}) e^{i\frac{x}{2}},\ e^{ix} - 1 = 2i \sin(\frac{x}{2}) e^{i\frac{x}{2}},\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \mathrm{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1,\ |\sin x| \leq |x|$

Équivalents
dérivées

$\sin x \underset{0}{\sim} x,\ \cos x \underset{0}{\sim} 1,\ 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2,\ \tan x \underset{0}{\sim} x$

$\sin'(x) = \cos x,\ \cos'(x) = -\sin x,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ \mathrm{cotan}'(x) = -1 - \mathrm{cotan}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Formules
d'additions

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},\ \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a,\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a,\ \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a),\ \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a,\ \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

Addition ↔
produit

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},\ \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)),\ \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$a \cos x + b \sin x = \rho \cos(x - \phi)$, où $\rho = \sqrt{a^2+b^2},\ \phi \equiv \arg(a+ib)\ (2\pi)$

Transformation
tan

$\cos^2 a = \frac{1}{1+\tan^2 a},\ \sin^2 a = \frac{\tan^2 a}{1+\tan^2 a} = \frac{1}{1+\mathrm{cotan}^2 a}$

pour $t = \tan(\frac{a}{2})$: $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin a = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

Trigonométrie circulaire réciproque

Domaines

$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \arccos : [-1,1] \to [0,\pi],\ \arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \mathrm{arccotan} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$

Formulaire

$x \in [-1,1],\ \sin(\arcsin x) = x,\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad ; \quad x \in]-1,1[,\ \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$x \in [-1,1],\ \cos(\arccos x) = x,\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad ; \quad x \in [-1,1] - \{0\},\ \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x,\ \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \arcsin(\sin x) = x \quad ; \quad x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos x) = x \quad ; \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \arctan(\tan x) = x$

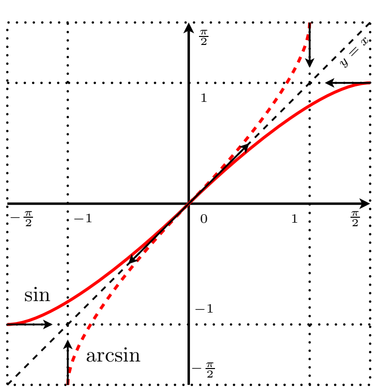
$x \neq 0,\ \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

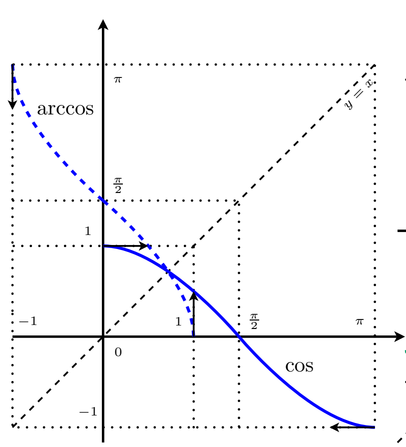
$x \in \mathbb{R},\ \mathrm{arccotan}\, x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

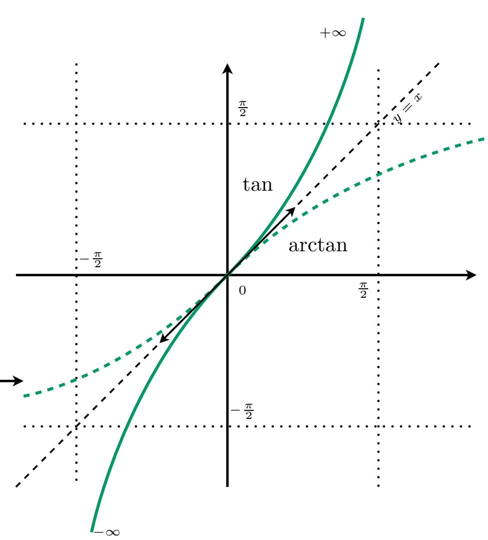
Équivalents
dérivées

$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\arcsin x \underset{0}{\sim} x,\ \frac{\pi}{2} - \arccos x \underset{0}{\sim} x,\ \arctan x \underset{0}{\sim} x$







Trigonométrie hyperbolique directe

Exponentielle divers

$\forall(u,v)\in\mathbb{C}^2,\ e^{u+v}=e^ue^v,\ \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ e^x=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x,\ e^{-x}=\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$

$\operatorname{ch}nx+\operatorname{sh}nx=e^{nx},\ \operatorname{ch}nx-\operatorname{sh}nx=e^{-nx},\ \operatorname{ch}^n x=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^n,\ \operatorname{sh}^n x=(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^n$

$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},\ \operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\ |\operatorname{sh}x|\geq|x|$

Équivalents dérivées

$\operatorname{sh}x\underset{0}{\sim}x,\ \operatorname{ch}x\underset{0}{\sim}1,\ \operatorname{ch}x-1\underset{0}{\sim}\frac{1}{2}x^2,\ \operatorname{th}x\underset{0}{\sim}x,\ \operatorname{ch}x\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2}e^x,\ \operatorname{sh}x\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2}e^x,\ \operatorname{th}x\underset{+\infty}{\sim}1$

$\operatorname{sh}'(x)=\operatorname{ch}x,\ \operatorname{ch}'(x)=\operatorname{sh}x,\ \operatorname{th}'(x)=1-\operatorname{th}^2x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$

Formules d'additions

$\operatorname{ch}(a+b)=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b,\ \operatorname{ch}(a-b)=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b-\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b$

$\operatorname{sh}(a+b)=\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}b\operatorname{ch}a,\ \operatorname{sh}(a-b)=\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b-\operatorname{sh}b\operatorname{ch}a$

$\operatorname{th}(a+b)=\frac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1+\operatorname{th}a\operatorname{th}b},\ \operatorname{th}(a-b)=\frac{\operatorname{th}a-\operatorname{th}b}{1-\operatorname{th}a\operatorname{th}b}$

$\operatorname{ch}2a=\operatorname{ch}^2a+\operatorname{sh}^2a=2\operatorname{ch}^2a-1=1+2\operatorname{sh}^2a,\ \operatorname{sh}2a=2\operatorname{sh}a\operatorname{ch}a,\ \operatorname{th}2a=\frac{2\operatorname{th}a}{1+\operatorname{th}^2a}$

$\operatorname{ch}^2a=\frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}2a),\ \operatorname{sh}^2a=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2a-1)$

$\operatorname{ch}3a=4\operatorname{ch}^3a-3\operatorname{ch}a,\ \operatorname{sh}3a=4\operatorname{sh}^3a+3\operatorname{sh}a$

Addition ↔ produit

$\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}b=2\operatorname{ch}\frac{a+b}{2}\operatorname{ch}\frac{a-b}{2},\ \operatorname{ch}a-\operatorname{ch}b=2\operatorname{sh}\frac{a+b}{2}\operatorname{sh}\frac{a-b}{2}$

$\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}b=2\operatorname{sh}\frac{a+b}{2}\operatorname{ch}\frac{a-b}{2},\ \operatorname{sh}a-\operatorname{sh}b=2\operatorname{ch}\frac{a+b}{2}\operatorname{sh}\frac{a-b}{2}$

$\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b)+\operatorname{ch}(a-b)),\ \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b)-\operatorname{ch}(a-b)),\ \operatorname{sh}a\operatorname{ch}b=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b)+\operatorname{sh}(a-b))$

Transformation th

$\operatorname{ch}^2a=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2a},\ \operatorname{sh}^2a=\frac{\operatorname{th}^2a}{1-\operatorname{th}^2a}=\frac{1}{\operatorname{coth}^2x-1}$

pour $t=\operatorname{th}(\frac{a}{2})$: $\operatorname{ch}a=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \operatorname{sh}a=\frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{th}a=\frac{2t}{1+t^2}$

Trigonométrie hyperbolique réciproque

Domaines

$\operatorname{argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \operatorname{argch}:[1,+\infty[\to\mathbb{R}^+,\ \operatorname{argth}:]-1,1[\to\mathbb{R},\ \operatorname{argcoth}:\mathbb{R}\setminus[-1,1]\to\mathbb{R}^*$

Formulaire

$x\in\mathbb{R},\ \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}x)=x,\ \operatorname{ch}(\operatorname{argsh}x)=\sqrt{1+x^2},\ \operatorname{th}(\operatorname{argsh}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$x\geq1,\ \operatorname{ch}(\operatorname{argch}x)=x,\ \operatorname{sh}(\operatorname{argch}x)=\sqrt{x^2-1},\ \operatorname{th}(\operatorname{argch}x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$x\in]-1,1[,\ \operatorname{th}(\operatorname{argth}x)=x,\ \operatorname{ch}(\operatorname{argth}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \operatorname{sh}(\operatorname{argth}x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$x\in\mathbb{R},\ \operatorname{argsh}(\operatorname{sh}x)=x\quad;\quad x\geq0,\ \operatorname{argch}(\operatorname{ch}x)=x\quad;\quad x\in\mathbb{R},\ \operatorname{argth}(\operatorname{th}x)=x$

$x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1],\ \operatorname{argcoth}x=\operatorname{argth}(\frac{1}{x})$

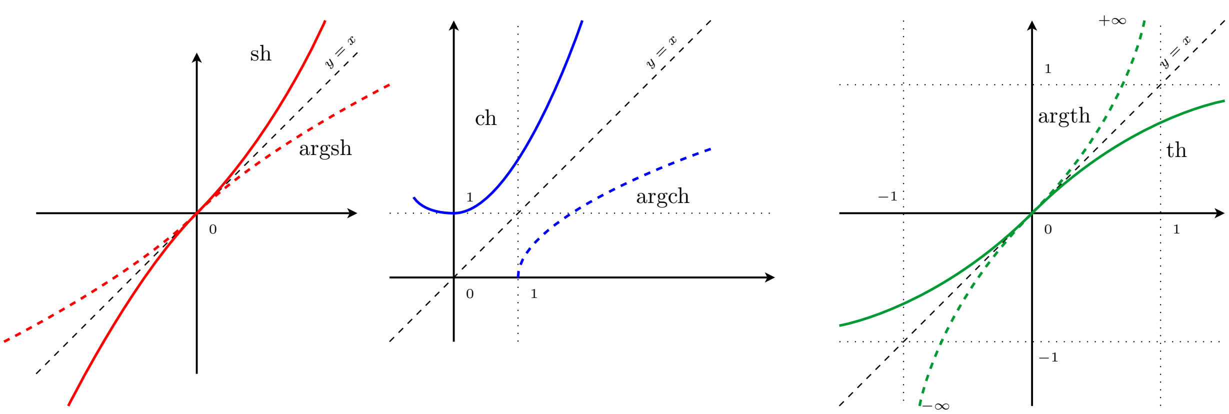
Équivalents dérivées

$(\operatorname{argsh})'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ (\operatorname{argch})'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ (\operatorname{argth})'(x)=\frac{1}{1-x^2}$

$\operatorname{argsh}x\underset{0}{\sim}x,\ \operatorname{argth}x\underset{0}{\sim}x,\ \operatorname{argsh}x\underset{+\infty}{\sim}\ln(2x),\ \operatorname{argch}x\underset{+\infty}{\sim}\ln(2x)$

Logarithme

$\operatorname{argsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ \operatorname{argch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ \operatorname{argth}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$



Puissances $(x \mapsto x^a)$

Domaines de définition

Pour $a \in \mathbb{N}$, $x^a = x \cdots x$ (a fois) et $x^0 = 1$ .... Domaine : $\mathbb{R}$ (peut s'étendre à $\mathbb{C}$)
(pour a impair, $x \mapsto x^a$ est une bijection impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; pour a pair non nul, $x \mapsto x^a$ est une application paire et une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$).

Pour $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $x^a = \frac{1}{x} \cdots \frac{1}{x}$ ($|a|$ fois) .... Domaine : $\mathbb{R}^*$ (peut s'étendre à $\mathbb{C}^*$)

Pour $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, i.e. $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, premiers entre eux.

- Si q est impair, $x^{\frac{p}{q}}$ est le seul réel y tel que $y^q = x^p$. .... Domaine : $\mathbb{R}$ $(p > 0)$ ou $\mathbb{R}^*$ $(p < 0)$
- Si q est pair, $x^{\frac{p}{q}}$ est le seul réel positif y tel que $y^q = x^p$. ...... Domaine : $\mathbb{R}^+$ $(p > 0)$ ou $\mathbb{R}^{+*}$ $(p < 0)$.
- Remarque : on écrit parfois $\sqrt[q]{x}$ pour $x^{\frac{1}{q}}$.

Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- Si $a > 0$, x^a est défini par $x^a = e^{a \ln x}$ et $0^a = 0$ .... Domaine : $\mathbb{R}^+$
- Si $a < 0$, x^a est défini par $x^a = e^{a \ln x}$. .... Domaine : $\mathbb{R}^{+*}$

Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $x^a = e^{a \ln x}$ .... Domaine : $\mathbb{R}^{+*}$

Dérivée Réciproque

$(x^a)' = a x^{a-1}$. La réciproque de $x \mapsto x^a$ est $x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$. *Attention au domaine de validité de ces deux formules.*

Exponentielles $(x \mapsto a^x)$ – logarithmes

Définitions

$\log_a$ est défini pour $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ .... Domaine : $\mathbb{R}^{+*}$
$\exp_a$ est défini pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$, par $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$ .... Domaine : $\mathbb{R}$ (peut s'étendre à $\mathbb{C}$)

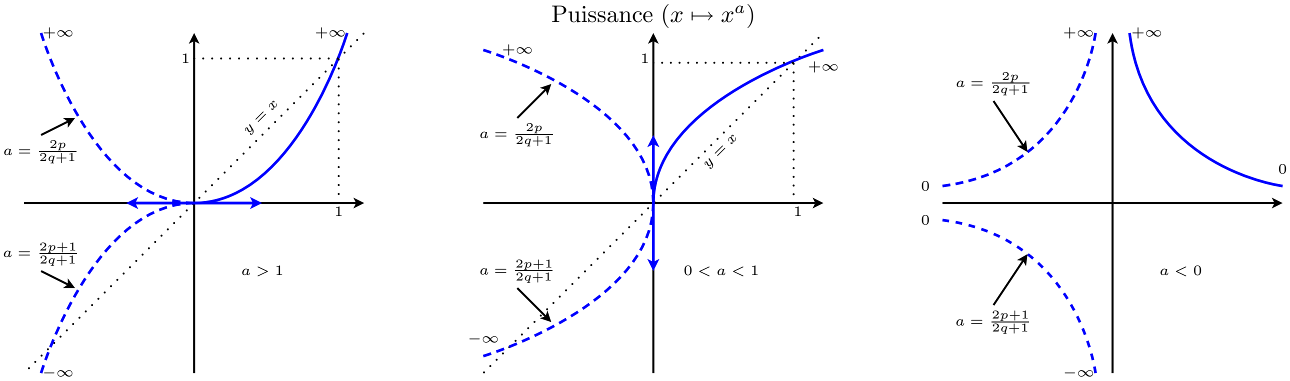
Dérivée Réciproque

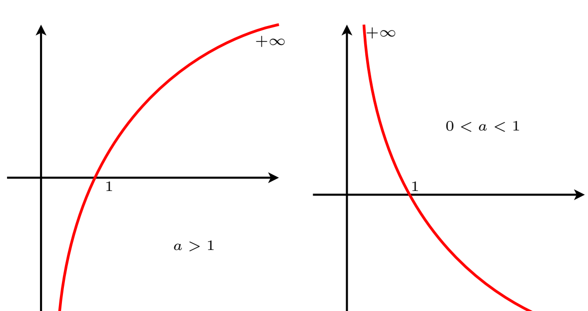
$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$, $(a^x)' = \ln a \, a^x$. $\log_a : (\mathbb{R}^{+*}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ et $\exp_a : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ sont des isomorphismes de groupes, réciproques l'un de l'autre $(a \neq 1)$.

Règles de calcul

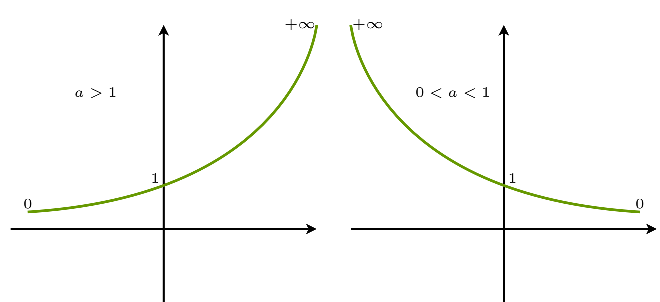
Dans le domaine de validité : $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$, $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$, $\alpha^{-\beta} = \frac{1}{\alpha^\beta}$, $\alpha^0 = 1$, $0^\alpha = 0$ $(\alpha \neq 0)$.

Puissance $(x \mapsto x^a)$





$\log_a(x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a})$



$\exp_a(x \mapsto a^x)$

Type	Fonction	Primitive (à constante près)	Domaine, conditions
Généralités	$u' f(u)$	$F \circ u$	F primitive de f
	u'/u	$\ln \lvert u \rvert$	u ne s'annule pas
	$u' u^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$u^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$u > 0$
	$u' u^{p},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$u^{p+1}/(p+1)$	$\forall x,\ u(x) \neq 0$ si $p < 0$
	$u' e^{u}$	e^{u}	
Puissances	$x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$x > 0$
	$x^{p},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$x^{p+1}/(p+1)$	$x \in \mathbb{R}^*$ si $p < 0$
	$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$	$x \in \mathbb{R}^*$
Exponentielles	$e^{\alpha x},\ \alpha \in \mathbb{C}^*$	$e^{\alpha x}/\alpha$	
Logarithme	$a^{x},\ a \in \mathbb{R}^{+*}$	$a^{x}/\ln a$	
	$\ln x$	$x \ln x - x$	$x > 0$
Trigonométrie	$\cos x$	$\sin x$	
circulaire	$\sin x$	$-\cos x$	
	$1/\cos^2 x$	$\tan x$	$x \notin (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$
	$1/\sin^2 x$	$-\operatorname{cotan} x$	$x \notin \pi\mathbb{Z}$
	$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$x \notin (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$
	$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$	$x \notin (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$
	$\operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x - x$	$x \notin \pi\mathbb{Z}$
	$\operatorname{cotan} x$	$\ln \lvert \sin x \rvert$	$x \notin \pi\mathbb{Z}$
	$1/\sin x$	$\ln \lvert \tan(\frac{x}{2}) \rvert$	$x \notin \pi\mathbb{Z}$
	$1/\cos x$	$\ln \lvert \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \rvert$	$x \notin (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$
Trigonométrie	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
hyperbolique	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
	$1/\operatorname{ch}^2 x$	$\operatorname{th} x$	
	$1/\operatorname{sh}^2 x$	$-\operatorname{coth} x$	$x \in \mathbb{R}^*$
	$\operatorname{th}^2 x$	$x - \operatorname{th} x$	
	$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	
	$\operatorname{coth}^2 x$	$x - \operatorname{coth} x$	$x \in \mathbb{R}^*$
	$\operatorname{coth} x$	$\ln \lvert \operatorname{sh} x \rvert$	$x \in \mathbb{R}^*$
	$1/\operatorname{sh} x$	$\ln \lvert \operatorname{th}(\frac{x}{2}) \rvert$	$x \in \mathbb{R}^*$
	$1/\operatorname{ch} x$	$2 \arctan e^{x}$	
Fractions	$1/(x-a),\ a \in \mathbb{R}$	$\ln \lvert x - a \rvert$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$
rationnelles	$1/(x-a)^{n},\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\ n \neq 1$
(voir $I_n,\ J_n$)	$1/(x^2+a^2),\ a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$	
	$1/(x^2-a^2),\ a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{2a} \ln \frac{\lvert x-a \rvert}{\lvert x+a \rvert}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$
Intégrales	$1/\sqrt{x^2+a^2},\ a \in \mathbb{R}^*$	$\ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$; $\operatorname{argsh} \frac{x}{\lvert a \rvert}$	
abéliennes	$1/\sqrt{x^2-a^2},\ a \in \mathbb{R}^*$	$\ln \lvert x + \sqrt{x^2-a^2} \rvert$; $\varepsilon(x) \operatorname{argch} \frac{\lvert x \rvert}{\lvert a \rvert}$	$\lvert x \rvert > \lvert a \rvert$
$\varepsilon(x) =$ signe de x	$1/\sqrt{a^2-x^2},\ a \in \mathbb{R}^*$	$\arcsin \frac{x}{\lvert a \rvert}$	$\lvert x \rvert < \lvert a \rvert$

Type	Fonction	Dérivée d'ordre n	Domaine, conditions
Leibniz	fg	$(fg)^{(n)} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$	f et g, n fois dérivables
Puissance	$x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$	$(x^{\alpha})^{(n)} = [\prod_{1 \leq k \leq n} (\alpha - k + 1)] x^{\alpha - n}$	$n \geq 1$
	$x^{p},\ p \in \mathbb{N}$	$(x^{p})^{(n)} = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$	$n \leq p$
	$1/x^{p},\ p \in \mathbb{N}^*$	$(1/x^{p})^{(n)} = \frac{(-1)^{n}(p+n-1)!}{(p-1)!\,x^{p+n}}$	
	$1/x$	$(1/x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n} n!}{x^{n+1}}$	

Intégrales classiques

- Primitive de $F(\cos x, \sin x)$, avec F une fraction rationnelle. *Règle de Bioche :*
  Si $F(\cos x, -\sin x) = -F(\cos x, \sin x)$, on change de variable $t = \cos x$.
  Si $F(-\cos x, \sin x) = -F(\cos x, \sin x)$, on change de variable $t = \sin x$.
  Si $F(-\cos x, -\sin x) = +F(\cos x, \sin x)$, on change de variable $t = \tan x$.
  Dans les autres cas on change de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$.

- Primitive de $F(x, \sqrt{1-x^2})$ (F : fraction rationnelle), on change de variable $x = \cos t$ ou $x = \sin t$.
  Primitive de $F(x, \sqrt{1+x^2})$ (F : fraction rationnelle), on change de variable $x = \operatorname{sh} t$.
  Primitive de $F(x, \sqrt{x^2-1})$ (F : fraction rationnelle), on change de variable $x = \operatorname{ch} t$.
- Primitive de $F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ (F : fraction rationnelle), on change de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

- Primitive d'un polynôme exponentiel $f(x) = P(x)e^{\omega x}$, avec $P \in \mathbb{C}[x]$, $\omega \in \mathbb{C}$. Intégration par parties (pour les petits degrés de P) ou bien recherche d'une primitive sous la forme $F(x) = Q(x)e^{\omega x}$, avec $Q' + \omega Q = P$ ($\deg(Q) = \deg(P)$).

- $I_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, relation de récurrence : $2nI_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n(x) + c$.
  $J_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, relation de récurrence : $2nJ_{n+1}(x) = \frac{x}{(1-x^2)^n} + (2n-1)J_n(x) + c$.
  $K_n(x) = \int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$, relation de récurrence : $\alpha K_{n+1}(x) = x^{n+1}e^{\alpha x} - (n+1)K_n(x) + c$.
  (c : constante d'intégration, formule valable pour $n \in \mathbb{R}$).

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-z} = \ln|x-z| + i\arctan\left(\frac{x-\Re\mathrm{e}(z)}{\Im\mathrm{m}(z)}\right) + c$, si $\Im\mathrm{m}(z) \neq 0$, $\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-z)^n} = \frac{(x-z)^{1-n}}{1-n} + c$.

FORMULES DE TAYLOR — 6

T.A.F. $\quad \boldsymbol{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)}$ ..... $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(]a,b[,\mathbb{R})$, pour un $c \in]a,b[$

Taylor-Lagrange $\quad \boldsymbol{|f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \sup_{]a,b[} |f^{(n)}|}$ ..... $f \in \mathscr{C}^{n-1}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}^n(]a,b[,\mathbb{R})$

Taylor-Young $\quad \boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x-a)^n}$ ..... $f \in \mathscr{D}^{n-1}(V,\mathbb{C})$ et n fois dérivable en a ($V \in \mathcal{V}_a$)

Taylor reste intégral

$\boldsymbol{f(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}$ ..... $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{C})$

$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t}$ ..... $f \in \mathscr{C}^{n+1}([0,x],\mathbb{C})$

LIMITES CLASSIQUES — 7

Trigonométrie $\quad \lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1, \quad \lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}, \quad \lim_{t\to 0} \dfrac{\tan t}{t} = 1$

Exponentielle $\quad \lim_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1, \quad \lim_{t\to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{t\to +\infty} t^\alpha e^{-t} = 0, \ (\alpha \in \mathbb{R})$

Logarithme $\quad \lim_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1, \quad \lim_{t\to 0} t\ln t = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^\alpha \ln t = 0, \quad \lim_{t\to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0, \ (\alpha \in \mathbb{R}^{+*})$

Suites $n \to \infty$ $\quad \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \to e^x, \ \dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n} \to x, \ \dfrac{n!}{n^n} \to 0, \ \dfrac{n^a}{n!} \to 0, \ \dfrac{a^n}{n!} \to 0, \ \dfrac{n^a}{b^n} \to 0 \ (b > 1), \ q^n \to \begin{cases} 0 \text{ si } |q| < 1 \\ +\infty \text{ (en module), si } |q| > 1 \\ \text{diverge si } |q| = 1 \text{ et } q \neq 1 \end{cases}$

$\sum_{0\leq k\leq n} \theta^k \to \dfrac{1}{1-\theta} \ (|\theta| < 1), \ \sum_{1\leq k\leq n} \dfrac{1}{k} \to +\infty, \ \sum_{1\leq k\leq n} \dfrac{1}{k^2} \to \dfrac{\pi^2}{6}, \ \sum_{1\leq k\leq n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \to \ln 2$

$\sum_{0\leq k\leq n} \dfrac{1}{k!} \to e, \ \sum_{0\leq k\leq n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \to \dfrac{\pi}{4}$

(N.B. tous les d.l. sont en zéro)

$$e^t = \sum_{0\le k\le n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$$

$$e^{-t} = \sum_{0\le k\le n} \frac{(-1)^k}{k!} t^k + o(t^n) = 1 - t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} t^n + o(t^n)$$

$$a^t = \sum_{0\le k\le n} \frac{\ln^k a}{k!} t^k + o(t^n) = 1 + \ln a\ t + \frac{\ln^2 a}{2} t^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!} t^n + o(t^n)$$

$$\operatorname{ch} t = \sum_{0\le k\le n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}) = 1 + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} t = \sum_{0\le k\le n} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(t^{2n+2}) = t + \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+2})$$

$$\cos t = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}) = 1 - \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + o(t^{2n+1})$$

$$\sin t = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(t^{2n+2}) = t - \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} + o(t^{2n+2})$$

$$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15} t^5 + \frac{17}{315} t^7 + o(t^8)$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{0\le k\le n} t^k + o(t^n) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + o(t^n)$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k t^k + o(t^n) = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + o(t^n)$$

$$-\ln(1-t) = \sum_{1\le k\le n} \frac{t^k}{k} + o(t^n) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^n}{n} + o(t^n)$$

$$\ln(1+t) = \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} + o(t^n) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{1\le k\le n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} t^k + o(t^n)$$

$$= 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + o(t^n)$$

$$\arcsin t = \sum_{0\le k\le n} \frac{(2k!)}{2^{2k}(k!)^2} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + o(t^{2n+2}) = t + \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{(2n!)}{2^{2n}(n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + o(t^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} t = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k \frac{(2k!)}{2^{2k}(k!)^2} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + o(t^{2n+2}) = t - \frac{t^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{(2n!)}{2^{2n}(n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + o(t^{2n+2})$$

$$\arccos t = \frac{\pi}{2} - \sum_{0\le k\le n} \frac{(2k!)}{2^{2k}(k!)^2} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + o(t^{2n+2}) = \frac{\pi}{2} - t - \frac{t^3}{6} - \cdots - \frac{(2n!)}{2^{2n}(n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + o(t^{2n+2})$$

$$\arctan t = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + o(t^{2n+2}) = t - \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} + o(t^{2n+2})$$

$$\operatorname{argth} t = \sum_{0\le k\le n} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + o(t^{2n+2}) = t + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + o(t^{2n+2})$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 9

Équation linéaire du premier ordre

Soit
$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$
où a et b sont continues sur un intervalle I. Les solutions sont $y(t) = Ce^{-A(t)} + S(t)$, où C est une constante réelle, A est une primitive de a sur I et S est une solution particulière (solution évidente ou trouvée par la méthode de la variation de la constante).

Équation linéaire du second ordre à coefficients constants

Soit
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t),$$
où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ a \neq 0$ et d est continue sur un intervalle I. On trouve une solution particulière S (solution évidente ou trouvée par la méthode de la variation de la constante), puis on résout l'équation caractéristique
$$P:\ ax^2 + bx + c = 0$$
Si P possède deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 alors les solutions réelles sont $y(t) = C_1e^{x_1t} + C_2e^{x_2t} + S(t)$, avec C_1 et C_2 deux constantes réelles.
Si P possède une solution réelle double x, alors les solutions réelles sont $y(t) = (C + Dt)e^{xt} + S(t)$, avec C et D deux constantes réelles.
Si P possède deux solutions complexes distinctes (nécessairement conjuguées), $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$, alors les solutions réelles sont $y(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) + S(t)$, avec A et B deux constantes réelles.
(N.B. les solutions complexes sont $z(t) = C_1e^{z_1t} + C_2e^{z_2t} + S(t)$, avec z_1 et z_2 deux solutions distinctes de P, et $z(t) = (C + Dt)e^{zt} + S(t)$, dans le cas où P possède une solution double z. Les constantes d'intégration C_1, C_2, C, D sont alors complexes).

SUITES CLASSIQUES 10

Suites du type : $u_{n+1} = au_n + b$

Si $a = 1$, $u_n = u_0 + nb$. Si $a \neq 1$, $u_n = a^nu_0 + b\dfrac{1-a^n}{1-a}$.

Suites du type : $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

Résoudre
$$P:\ ax^2 + bx + c = 0$$
Si P possède deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 alors les solutions réelles sont $u_n = C_1x_1^n + C_2x_2^n$, avec C_1 et C_2 deux constantes réelles.
Si P possède une solution réelle double x, alors les solutions réelles sont $u_n = (C + Dn)x^n$, avec C et D deux constantes réelles.
Si P possède deux solutions complexes distinctes (nécessairement conjuguées), $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$, alors les solutions réelles sont $u_n = \rho^n(A\cos(\theta n) + B\sin(\theta n))$, avec A et B deux constantes réelles.
(N.B. les solutions complexes sont $u_n = C_1z_1^n + C_2z_2^n$, avec z_1 et z_2 deux solutions distinctes de P, et $u_n = (C + Dn)z^n$, dans le cas où P possède une solution double z. Les constantes C_1, C_2, C, D sont alors complexes).

Suites du type : $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d},\ c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$

Soit $f(t) = \dfrac{at + b}{ct + d}$.
Si f possède deux points fixes distincts p et q, étudier la suite $v_n = \dfrac{u_n - p}{u_n - q}$, qui est géométrique.
Si f possède un unique point fixe p, étudier la suite $v_n = \dfrac{1}{u_n - p}$, qui est arithmétique.

Géométrie affine Dans la suite f est une application affine et $\vec{f}$ son application linéaire associée

- $t_{\vec{u}}$, translation de vecteur $\vec{u}$. $t_{\vec{u}}(M) = \vec{u} + M$. Une application affine f est une translation ssi $\vec{f} = \mathrm{I}_E$.
- $h_{A,k}$, homothétie de centre A de rapport k. $h_{A,k}(M) = A + k\overrightarrow{AM}$. Une application affine f est une homothétie de rapport k ssi $\vec{f} = k\,\mathrm{I}_E$ et f possède un point fixe.
- $p_{\mathscr{F},G}$, projection sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G. $p_{\mathscr{F},G}(M)$ est l'unique point de $\mathscr{F}$ vérifiant $\overrightarrow{Mp_{\mathscr{F},G}(M)} \in G$. Soit $f \in Aff(E)$. f est une projection $\Leftrightarrow f \circ f = f \Leftrightarrow \vec{f}$ est une projection vectorielle et f possède un point fixe.
- $s_{\mathscr{F},G}$, symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ parallèlement à G. $s_{\mathscr{F},G}(M)$ est l'unique point vérifiant

$$\overrightarrow{Ms_{\mathscr{F},G}(M)} = 2\,\overrightarrow{Mp_{\mathscr{F},G}(M)}$$

Soit $f \in Aff(E)$. f est une symétrie $\Leftrightarrow f \circ f = \mathrm{I}_E \Leftrightarrow \vec{f}$ est une symétrie vectorielle et f possède un point fixe.

Géométrie euclidienne Dans la suite E est un espace euclidien, $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire et $\|\ \|$ sa norme

- Une projection, une symétrie, une affinité, (d'éléments remarquables F et G) est dite orthogonale ssi $G = F^{\perp}$.
- Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
- Une isométrie vectorielle est un endomorphisme de E qui conserve le produit scalaire $(O(E))$: $\forall (u,v) \in E^2,\ \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$. Elle est directe si elle transforme une base orthonormée directe en base orthonormée directe (*rotation*, $SO(E)$).
- Une isométrie affine est une transformation affine de E qui conserve le produit scalaire : $\forall (A,B,C,D) \in E^4,\ \langle \overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}\rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\rangle$; ceci équivaut au fait que son a.l. associée est une isométrie vectorielle. Elle est directe (on parle de *déplacement*) si elle transforme une base orthonormée directe en base orthonormée directe, ceci équivaut au fait que son a.l. associée est une isométrie vectorielle directe, i.e. une rotation.
- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E, alors la coordonnée de $x \in E$ dans la direction e_i est $\langle x, e_i\rangle$.
- *Théorème de Pythagore.* Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille orthogonale alors

$$\|f_1 + \dots + f_p\|^2 = \|f_1\|^2 + \dots + \|f_p\|^2$$

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* $\forall (x,y) \in E^2,\ |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont liés.
- *Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.* Si $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre de E, on peut construire une famille orthonormée $(u_1, \dots, u_p)$ telle que $\forall k \in [\![1,p]\!],\ \mathrm{vect}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{vect}(u_1, \dots, u_k)$.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. alors

$$\langle \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n\rangle = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n \quad \text{et} \quad \|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

- Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ${}^tMM = \mathrm{I}_n$ si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire standard). Leur ensemble est noté $O(n)$, un élément de $O(n)$ est de déterminant ± 1, le sous-ensemble des éléments de $O(n)$ de déterminant 1 est noté $SO(n)$.
- Un endomorphisme $f \in L(E)$ est une isométrie si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormée ; c'est une rotation si et seulement si de plus $\det f = 1$.

Le plan et l'espace sont munis d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}^+ = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou $\mathcal{B}^+ = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Isométries vectorielles du plan

- Directe : rotation de centre O d'angle θ ($\theta = 0$ correspond à l'identité, $\theta = \pi$ correspond à $-$identité)

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}^+} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Indirecte : réflexion par rapport à une droite D formant une droite d'angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe dirigé par $\vec{\imath}$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}^+} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mat}_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  où $\mathcal{U} = (\vec{u}, \vec{u}_1)$ base orthonormée, avec $\vec{u}$ qui dirige D.

Isométries affines du plan ayant un point fixe

- Directe : rotation de centre A d'angle θ.
- Indirecte : réflexion par rapport à une droite $\mathscr{D}$.

Isométries affines du plan sans point fixe

- Directe : translation $t_{\vec{u}}$.
- Indirecte : composée commutative d'une translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ et d'une réflexion $s_{\mathscr{D}}$ par rapport à une droite $\mathscr{D}$ dirigée par $\vec{u}$ (décomposition unique sous cette forme).

Isométries vectorielles de l'espace

- Directe : identité ou rotation d'axe D^+ d'angle θ ($\theta = 0$ correspond à l'identité, $\theta = \pi$ correspond à la symétrie par rapport à la droite D)

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{U}^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  où $\mathcal{U}^+ = (\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base orthonormée directe et $\vec{u}$ dirige D^+.
- Indirecte : réflexion par rapport à un plan P ou composée d'une rotation d'axe D^+ et d'une réflexion par rapport au plan $P = D^\perp$ ($\theta = 0$ correspond à réflexion, $\theta = \pi$ correspond à $-$identité)

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{V}^+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  où $\mathcal{V}^+ = (\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base orthonormée directe et $\vec{v}$ dirige D^+.
- On a l'expression analytique d'une isométrie $f(\vec{x}) = \pm\langle \vec{x}, \vec{u}\rangle\, \vec{u} + \cos\theta\, [\vec{u} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{u})] + \sin\theta\, (\vec{u} \wedge \vec{x})$ ($+$ pour directe, $-$ pour indirecte), θ est l'angle et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire qui dirige D^+.

Isométries affines de l'espace ayant un point fixe

- Directe : rotation d'axe $\mathscr{D}^+$ et d'angle θ.
- Indirecte : réflexion par rapport à un plan $\mathscr{P}$ et composée commutative d'une rotation d'axe $\mathscr{D}^+$ et d'une réflexion par rapport à un plan parallèle à $D^\perp$.

Isométries affines de l'espace sans point fixe

- Directe : translation ou composée commutative d'une translation $t_{\vec{u}}$ et d'une rotation d'axe $\mathscr{D}$, avec $\mathscr{D}$ dirigée par $\vec{u}$ (*vissage*) : décomposition unique sous cette forme.
- Indirecte : composée commutative d'une translation $t_{\vec{u}}$ et d'une réflexion par rapport à un plan $\mathscr{P}$, avec $\vec{u} \parallel \mathscr{P}$: décomposition unique sous cette forme.

Dans toute la suite $(E, .)$ est un plan euclidien de distance associée d, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition. Soient $\mathscr{D}$ une droite, $F \notin \mathscr{D}$ et e un réel strictement positif. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M \in E \mid d(F, M) = e\, d(M, \mathscr{D})\}$$

est appelé conique d'excentricité e, de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$. La droite contenant F et orthogonale à $\mathscr{D}$ est appelé axe focal (c'est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$). On dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole si $e > 1$, une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$ (remarque : on note souvent h la distance du foyer à la directrice et $p = eh$ appelé paramètre de l'ellipse qui correspond à la distance de F à chacun des deux points de la conique situés sur la droite passant par F et parallèle à $\mathscr{D}$).

Paraboles

• Si dans $\mathcal{R}$ une conique $\mathcal{C}$ a pour équation (dite réduite) :

$$\boldsymbol{y^2 = 2px}$$

avec $p \neq 0$, alors $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet O de foyer $F(\frac{p}{2}, 0)$ et de directrice $\mathscr{D} : x = -\frac{p}{2}$.

Ellipses

• Si dans $\mathcal{R}$ une conique $\mathcal{C}$ a pour équation (dite réduite) :

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

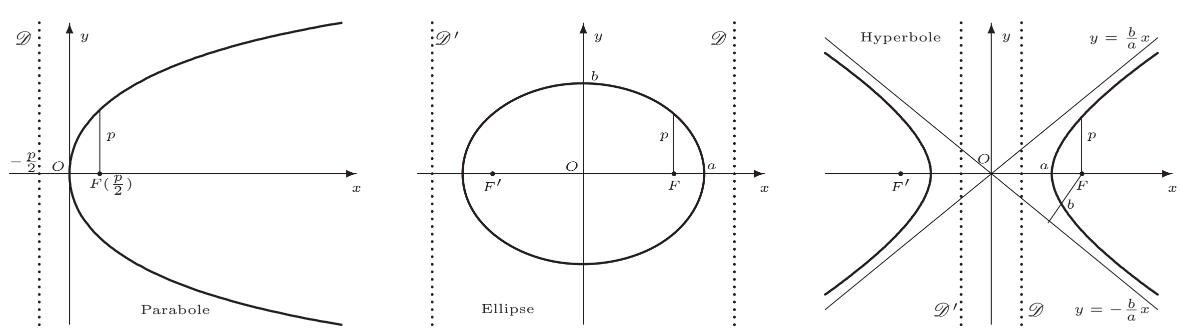
avec $0 < b < a$, alors $\mathcal{C}$ est une ellipse d'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, de foyer $F(ea, 0)$ de directrice $\mathscr{D} : x = \frac{a}{e}$ (ou $F'(-ea, 0)$ et $\mathscr{D}' : x = -\frac{a}{e}$) (remarque : si $a = b$, il s'agit d'un cercle, par convention, on dit que son excentricité est nulle) ; $p = \frac{b^2}{a}$, $h = \frac{(1-e^2)a}{e}$.
L'axe focal $O\vec{\imath}$ est appelé grand axe. Il coupe l'ellipse aux points $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, le réel a est appelé demi-axe focal ou demi-grand axe. L'axe focal $O\vec{\jmath}$ est appelé petit axe. Il coupe l'ellipse aux points $(0, b)$ et $(0, -b)$, le réel b est appelé demi-axe non focal ou demi-petit axe.
L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ peut se paramétrer par $x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$.

Hyperboles

• Si dans $\mathcal{R}$ une conique $\mathcal{C}$ a pour équation (dite réduite) :

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'excentricité $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, de foyer $F(ea, 0)$ de directrice $\mathscr{D} : x = \frac{a}{e}$ (ou $F'(-ea, 0)$ et $\mathscr{D}' : x = -\frac{a}{e}$) ; $p = \frac{b^2}{a}$, $h = \frac{(e^2-1)a}{e}$.
L'axe focal $O\vec{\imath}$ est appelé axe transverse. Il coupe l'hyperbole aux points $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, le réel a est appelé demi-axe focal ou demi-grand axe. L'axe focal $O\vec{\jmath}$ est appelé axe non transverse. Le réel b est appelé demi-axe non focal (remarque : l'hyperbole est dite équilatère si ses asymptotes sont orthogonales : $e = \sqrt{2}$).
L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ peut se paramétrer par $x(t) = \epsilon a \operatorname{ch} t, y(t) = b \operatorname{sh} t$, avec $\epsilon = \pm 1$.



Équation polaire

• Dans $\mathcal{R}$, on considère une droite $\mathscr{D}$ d'équation polaire $r(\theta) = \frac{h}{\cos(\theta - \theta_0)}$, avec $h \neq 0$. Une équation polaire de la conique d'excentricité e, de foyer O et de directrice $\mathscr{D}$ est $\rho(\theta) = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$.

Définition bifocale

• Par symétrie, les ellipses et hyperboles possèdent deux foyers F et F' et deux directrices $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Soient $2c = d(F, F')$ et $a > 0$. Si $a > c$, l'ensemble $\boldsymbol{\{M\ ;\ MF + MF' = 2a\}}$, est l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a. Si $a < c$, l'ensemble $\boldsymbol{\{M\ ;\ |MF - MF'| = 2a\}}$, est l'hyperbole de foyers F et F' et de demi-axe focal a.

Définition analytique générale

• Tout ensemble défini par une équation du type : $\boldsymbol{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$, est soit vide, un point, la réunion de deux droites (éventuellement confondues), une hyperbole, une ellipse ou une parabole.

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

- *Champ de vecteurs.* On appelle champ de vecteurs sur U de classe $\mathscr{C}^k$ toute application $\vec{f} \in \mathscr{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$.
- *Champ scalaire.* On appelle champ scalaire sur U de classe $\mathscr{C}^k$ toute application $f \in \mathscr{C}^k(U, \mathbb{R})$.
- *Gradient.* On appelle gradient d'un champ scalaire $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, le champ de vecteurs

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \ : \ U & \to & \mathbb{R}^p \\ u & \mapsto & \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(u)\Big) \end{array}$$

- *Divergence.* On appelle divergence d'un champ de vecteurs $\vec{f} = (f_1, \dots, f_p)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div}\, \vec{f} \ : \ U & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \displaystyle\sum_{1 \le i \le p} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(u) \end{array}$$

- *Laplacien.* On appelle laplacien d'un champ scalaire $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} \Delta f \ : \ U & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \displaystyle\sum_{1 \le i \le p} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(u) \end{array}$$

- *Rotationnel* (en dimension $p = 3$). On appelle rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$, le champ de vecteurs

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f} \ : \ U & \to & \mathbb{R}^3 \\ u & \mapsto & \Big(\dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(u) - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(u), \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(u) - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(u), \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(u) - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(u)\Big) \end{array}$$

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^3$ dérive d'un potentiel s'il existe un champ scalaire $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$. Si F dérive d'un potentiel alors son rotationnel est nul. Réciproquement, si U est étoilé par rapport à l'un de ces points et le rotationnel de $\vec{f}$ est nul alors $\vec{f}$ dérive d'un potentiel.

Formulaire. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\alpha \in \mathbb{R}$, f, g des champs scalaires, $\vec{f}, \vec{g}$ des champs vectoriels.

$$\begin{array}{ll}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f + \alpha g) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f + \alpha\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g & \Delta(f + \alpha g) = \Delta f + \alpha \Delta g \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f} + \alpha \vec{g}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f} + \alpha\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g} & \mathrm{div}(\vec{f} + \alpha \vec{g}) = \mathrm{div}\, \vec{f} + \alpha\, \mathrm{div}\, \vec{g} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) = f\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + g\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f & \Delta(fg) = f\, \Delta g + 2\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + g\, \Delta f \\
\mathrm{div}(f \vec{g}) = f\ \mathrm{div}\, \vec{g} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \vec{g} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}(f \vec{g}) = f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \wedge \vec{g} \\
\mathrm{div}(\vec{f} \wedge \vec{g}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f} \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) \wedge (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g) \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0} & \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}) = 0
\end{array}$$

Intégrale curviligne. Soit $\vec{f} = (f_1, f_2)$ un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, $\omega = f_1\, \mathrm{d}x + f_2\, \mathrm{d}y$ et C une courbe orientée incluse dans U parametrée par $g \in \mathscr{C}^1_M([a, b], U)$ (avec $g(t) = x(t), y(t)$), alors on définit la circulation du champ $\vec{f}$ le long de C par

$$\int_a^b \big[x'(t) f_1\big(x(t), y(t)\big) + y'(t) f_2\big(x(t), y(t)\big)\big]\, \mathrm{d}t = \oint_C \omega, \text{ autre notation : } \oint_C \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{M}$$

($\cdot$ est ici le produit scalaire) qui est indépendant de la paramétrisation de la courbe orientée C. Si $\vec{f}$ dérive d'un potentiel f, alors $\oint_C \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{M} = f(B) - f(A)$, si de plus C est fermée alors $\oint_C \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{M} = 0$.

Formule de Green-Riemann. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ de bord ∂K, vu comme courbe orientée de sorte que le vecteur normal soit dirigé vers l'intérieur de K ; alors pour un champ $\vec{f} = (f_1, f_2)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U contenant K, on a

$$\oint_{\partial K} \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{M} = \iint_K \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)\Big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$